

数理計画法 第1回

1. 数理計画問題
2. 線形計画

担当： 塩浦昭義
情報科学研究科(工学部 電子情報・物理工学科)
徳山・塩浦研究室 助教授
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp



「数理計画法」の授業の目的

- 数理計画問題、およびその解法について学ぶ

使用する教科書

田村明久、村松正和著
「最適化法」、工系数学講座17巻
共立出版、2002年
適宜資料を配布



成績評価の方法および基準

- 中間試験(50点)
- 期末試験(50点)
- 演習レポートの提出状況(最大20点) により評価
- 60点以上で合格
- 出席点は全く考慮しない
- レポートを一回以上提出した者のみ
試験の受験を許可する

授業に関する情報のページ

<http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching/>



数理計画問題とは？

- 数理計画問題(最適化問題)
与えられた評価尺度に関して
最も良い解を求める問題



例1: 飲料会社のジュース生産計画

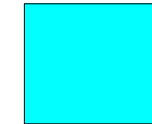
- 限られた資源を使って最大の収益を得たい
- 資源 - オレンジ、にんじん、トマト
- 生産するジュース
 - オレンジ100、トマト100、ミックス



種類	オレンジ	にんじん	トマト	収益
オレンジ	5			2
トマト			4	2
ミックス	3	2	1	3
最大供給量	8	2	9	

例2: 長方形の問題

- 面積が1以上の長方形を描く



- 外周の長さを最小にするには？

数理計画問題の解き方

- 問題を数式を使って数学的に表現
(定式化)
- 定式化された問題にアルゴリズムを適用、
答えを求める

この授業の内容

数理計画問題を解く様々なアルゴリズムの説明

例1の定式化

- 限られた資源を使って最大の収益を得たい

種類	オレンジ	にんじん	トマト	収益
オレンジ	5			2
トマト			4	2
ミックス	3	2	1	3
最大供給量	8	2	9	

- 各ジュースの生産量を変数で表現

x : オレンジ100の生産量

y : トマト100の生産量

z : ミックスの生産量

例1の定式化(続き)

種類	オレンジ	にんじん	トマト	収益
オレンジ	5			2
トマト			4	2
ミックス	3	2	1	3
最大供給量	8	2	9	

収益を最大に

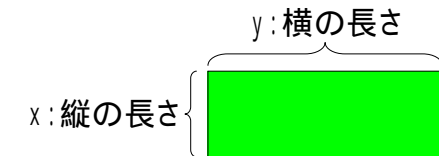
$$\begin{aligned} \text{最大化} & 2x + 2y + 3z \\ \text{条件} & 5x + 3z \leq 8 \\ & 2z \leq 2 \\ & 4y + z \leq 9 \\ & x, y, z \geq 0 \end{aligned}$$

使用できるオレンジの量は8以下

各ジュースの生産量は非負

例2の定式化

- 面積が1以上の長方形を描く
- 外周の長さを最小にするには？



$$\begin{aligned} \text{最小化} & 2x + 2y \\ \text{条件} & xy \geq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

外周の長さを最小に

面積は1以上

縦横の長さは非負

線形計画問題、非線形計画問題

例1:

$$\begin{aligned} \text{最大化} & 2x + 2y + 3z \\ \text{条件} & 5x + 3z \leq 8 \\ & 2z \leq 2 \\ & 4y + z \leq 9 \\ & x, y, z \geq 0 \end{aligned}$$

すべて線形の等式、不等式で表現されている

→ 線形計画問題

例2:

$$\begin{aligned} \text{最小化} & 2x + 2y \\ \text{条件} & xy \geq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

非線形の式が使われている

→ 非線形計画問題

整数計画問題

例1の変種:

$$\begin{aligned} \text{最大化} & 2x + 2y + 3z \\ \text{条件} & 5x + 3z \leq 8 \\ & 2z \leq 2 \\ & 4y + z \leq 9 \\ & x, y, z \geq 0 \\ & x, y, z \text{ は整数} \end{aligned}$$

変数に整数制約が付加される

→ 整数計画問題

数理計画問題に関する用語

最大化 $2x + 2y + 3z$
 条件 $5x + 3z = 8$
 $2z = 2$
 $4y + z = 9$
 $x, y, z \geq 0$

目的関数: 最小化または最大化される関数

制約式: 問題の中の条件式

数に関する用語(続き)

資料の「最小化」は「最大化」の誤り

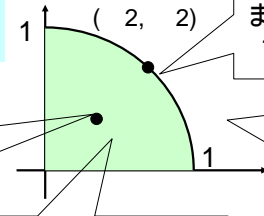
最大化 $x + y$
 条件 $x^2 + y^2 = 1$
 $x, y \geq 0$

最適解: 目的関数を最大または最小にする許容解

最適値: 最適解の目的関数値

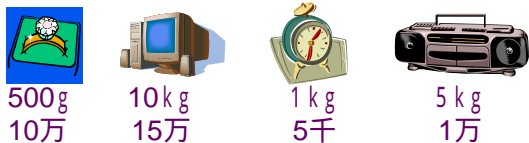
許容解: 制約式をすべて満たすベクトル (x, y)

許容解領域: 許容解すべての集まり



整数計画の例1: ナップサック問題

- ナップサックにものを詰め込む

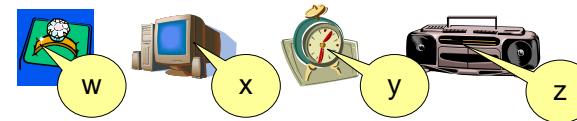


- ナップサックの重量制限(10kg)を越えてはならない
- 総価値を最大にしたい



整数計画の例1: ナップサック問題

定式化—各アイテムに変数を割り当て



宝石を選んだら $w = 1$, 選ばなかったら $w = 0$

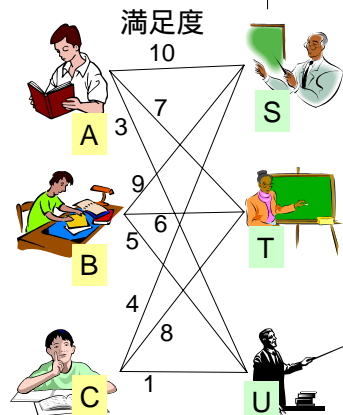
選んだアイテムの総価値

選んだアイテムの総重量

最大化 $10w + 15x + 0.5y + z$
 条件 $0.5w + 10x + y + 5z = 10$
 w, x, y, z は 0 または 1

整数計画の例2: 研究室配属

- 各研究室に学生一人を割り当てる
- 学生の満足度の合計を最大にしたい



整数計画の例2: 研究室配属

定式化

学生と先生のペアに変数を割り当て

$x_{AS}, x_{AT}, x_{AU}, x_{BS}, \dots$
 A を S に割当てたら $x_{AS} = 1$
 割り当てなければ $x_{AS} = 0$

最大化 $10x_{AS} + 7x_{AT} + 3x_{AU} + \dots$

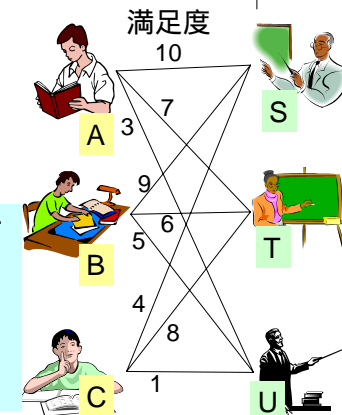
条件 $x_{AS} + x_{AT} + x_{AU} = 1$

...

$x_{AS} + x_{BS} + x_{CS} = 1$

...

各変数は 0 または 1



非線形計画の例1: 構造設計

2本の鉄パイプ(トラス)で荷重 $2W$ を支える

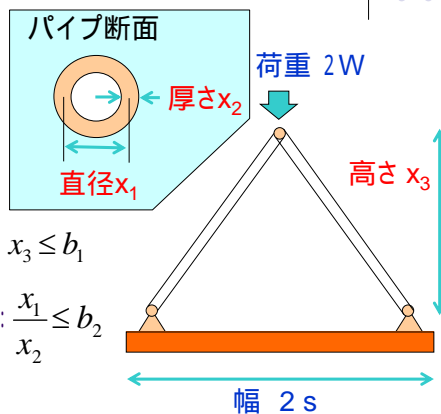
- 鉄パイプの総重量
(ρ は密度)

$$2\pi\rho x_1 x_2 \sqrt{s^2 + x_3^2}$$

最小にしたい

- トラスの高さの制限: $x_3 \leq b_1$

- パイプの厚さの制限: $\frac{x_1}{x_2} \leq b_2$



非線形計画の例1: 構造設計

- トラスが重みにより変形したまま元に戻らない、ということにならないための条件:

$$W\sqrt{s^2 + x_3^2} \leq b_3 x_1 x_2 x_3$$

- パイプが折れ曲がらないための条件:

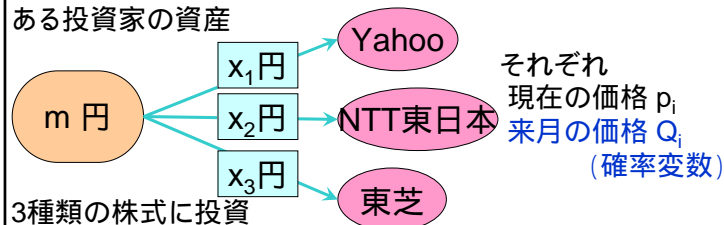
$$W(s^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}} \leq b_4 x_1 x_3 (x_1^2 + x_2^2)$$

- 非負条件: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

非線形計画の例2： ポートフォリオ選択問題

ポートフォリオ：株式などの金融資産を組み合わせたもの
投資家が最も満足する投資方法を求めたい

ある投資家の資産



3種類の株式に投資

$$1\text{ヵ月後の資産: } M = \frac{Q_1 x_1}{p_1} + \frac{Q_2 x_2}{p_2} + \frac{Q_3 x_3}{p_3} \quad (\text{確率変数})$$

非線形計画の例2： ポートフォリオ選択問題

来月の資産Mに対する満足度: $U(M) = M - M^2$

$U(M)$ の期待値を最大にしたい

$$E[U(M)] = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \beta \left[\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right]^2$$

$$- \beta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

r_i は Q_i/p_i の平均
 σ_{ij} は
 $(Q_i/p_i - r_i)(Q_j/p_j - r_j)$
の共分散

条件: $x_1 + x_2 + x_3 = m, x_1, x_2, x_3 \geq 0$

2. 線形計画 2.1 線形計画問題とその標準形

線形計画問題(LP)の定義

• 目的関数が線形関数, 制約式も線形式の最適化問題

目的は「最大化」「最小化」
どちらでもよい

最大化 $2x + 2y + 3z$

条件 $5x + 3z = 8$

$2z = 2$

$4y + z = 9$

$x, y \geq 0$

制約式は「 $>$ 」「 $=$ 」「 $<$ 」
どれでもよい

制約式は
「不等号つき」「不等号なし」
どちらでもよい

LPの不等式標準形

任意の形のLPを扱う
のは面倒

不等式標準形

- ◆ 目的は**最小化**
- ◆ 制約式は「**左辺** **右辺**」の形
- ◆ 各変数は**非負**

最小化 $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$

条件 $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$

...

$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

次回の予定



- 来週(10月12日)は**休講**. 次回は10月19日.
- 線形計画
線形計画問題とその標準形
双対問題
- 教科書を生協で購入しておいてください