数理計画法　第7回

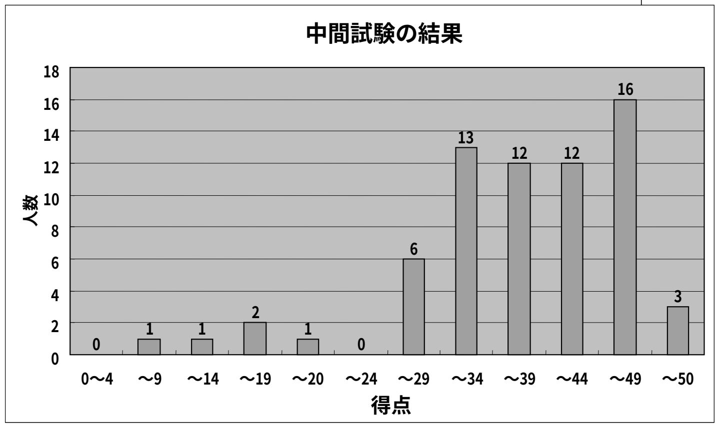
ネットワーク計画

2．最大フロー問題
3．最小費用フロー問題

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　助教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

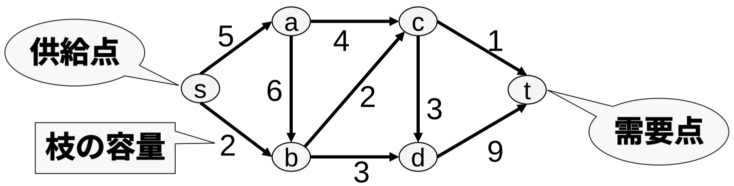
中間試験の結果について

平均点　　３７．２



復習：最大フロー問題

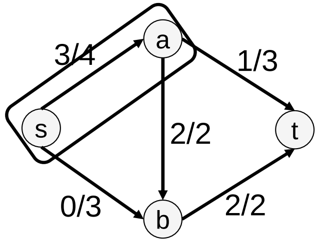
入力：有向グラフ G = (V, E), 供給点 s, 需要点 t
　　各枝 (i, j) ∈ V の容量 u_{ij} ≧ 0



目的：供給点から需要点にフローを出来るだけ多く流す
条件1 (容量条件)：0 ≦ 各枝のフロー量 ≦容量
条件2 (流用保存条件)：
　　頂点から出るフロー量　＝　入るフロー量

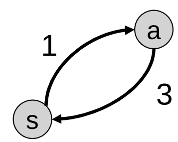
復習：残余ネットワーク (その1)

残余ネットワークの作り方



問題例とフロー
各枝のデータは
(フロー量/容量)

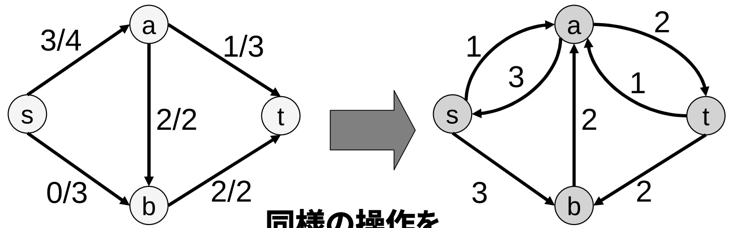
枝(s,a)において
☆さらに４－３＝１だけフロー
　　を流せる
⇒　残余ネットワークに
　　容量1の枝(s,a)を加える



☆現在のフロー３を逆流させて
０にすることが出来る
⇒　容量3の枝(a,s)を加える

復習：残余ネットワーク（その2）

残余ネットワークの作り方



問題例とフロー

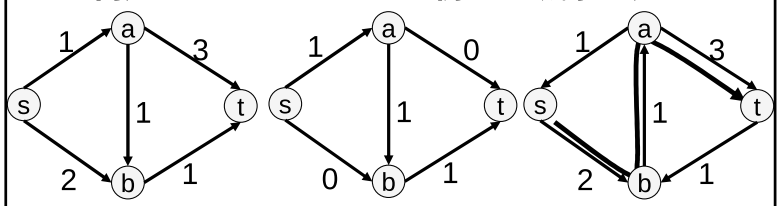
同様の操作を各枝に行う

残余ネットワークの完成

復習：残余ネットワークの性質（その1）

性質：残余ネットワークに s-t パスが存在する
⇔ 現在のフローは増加可能

問題　フローの例　残余ネットワーク



s-t パスが存在
⇒ フローは
増加可能

復習：フロー増加法

最大フローを求めるためのアルゴリズム

ステップ0：初期フローとして、全ての枝のフロー量を0とする

ステップ1：現在のフローに関する残余ネットワークを作る

ステップ2：残余ネットワークに s-t パスが存在しない
⇒ 現在のフローは最大（終了）

ステップ3：残余ネットワークの s-t パスをひとつ求め、それを用いて現在のフローを更新する

ステップ4：ステップ1へ戻る

定理：フロー増加法終了時に得られたフローは最大フロー

s-tカット

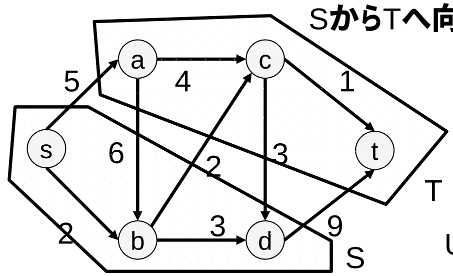
最大フロー問題のフロー値を上から見積もりたい

s-t カット (S, T): s ∈ S, t ∈ T,

S, T は頂点集合Vの分割 (S∩T = ∅, S∪T = V)

s-t カット (S, T) の容量U(S,T)：

SからTへ向かう枝の容量の和



U(S,T)=5+2+9=15

s-t カットの性質 (その1)

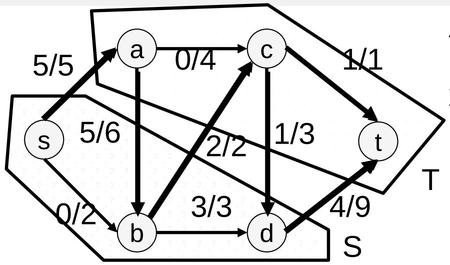
性質1：

任意のs-t**カット**(S, T) **と任意のフロー** (x_{ij} | (i,j) ∈ E) **に対し**

S**から**T**への枝のフロー量の和** x(S,T)

ー T**から**S**への枝のフロー量の和** x(T,S)

＝ **需要点に流れ込むフロー量** f



f = 1 + 4 = 5

x(S, T) = 5 + 2 + 4 = 11

x(T, S) = 5 + 1 = 6

f = 11 – 6 = 5

s-t カットの性質 (その1)

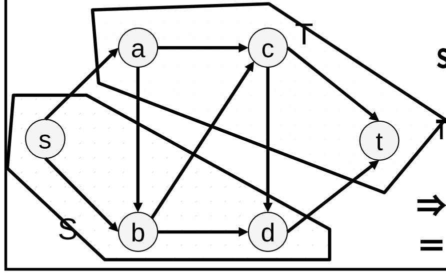
下記のネットワークの場合の証明：

頂点 s, b, d ∈S**に関する流量保存条件を足し合わせる**

$(x_{bc} + x_{bd}) – (x_{sb} + x_{ab}) = 0$

$x_{dt} \quad – (x_{cd} + x_{bd}) = 0$

$x_{sa} + x_{sb} \quad = f$



左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 x_{ij} **は係数が**＋1

TからSへの枝 の変数 x_{ij} **は係数が**－1

SからSへの枝 の変数 x_{ij} **は打ち消される**

TからTへの枝 の変数 x_{ij} **は登場しない**

⇒**左辺**

＝$(x_{sa}+x_{bc}+x_{dt}) – (x_{ab}+x_{cd})$

s-t カットの性質 (その1)

一般の場合の証明：下記の制約式を足し合わせる

Σ{x_{kj} | (k,j) **は** k **から出る**}

ー **Σ**{x_{ik} | (i,k) **は** k **に入る**} = 0 (k ∈ S – {s})

Σ{x_{sj} | (s,j) **は** s **から出る**} ー **Σ**{x_{is} | (i,s) **は** s **に入る**} = f

左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 x_{ij} **は係数が**＋1

TからSへの枝 の変数 x_{ij} **は係数が**－1

SからSへの枝 の変数 x_{ij} **は打ち消される**

TからTへの枝 の変数 x_{ij} **は登場しない**

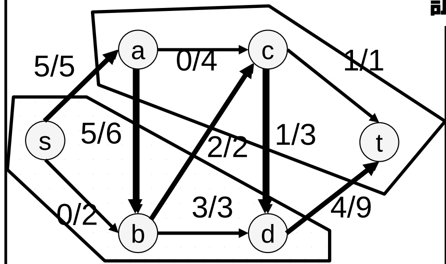
⇒ **左辺**＝ x(S, T) – x(T, S)

s-t カットの性質 (その2)

性質2：**任意の**s-t**カット**(S, T) **とフロー** (x_{ij} | (i,j) ∈ E) **に対し**

フロー量 f ≦ **カットの容量** U(S,T)

証明：



f = 5 ≦ 15 = U(S, T)

f = x(S, T) – x(T,S)
(**性質1**)
x(S, T) ≦ U(S, T)
(**容量条件**)
x(T, S) ≧ 0
(**フローは非負**)
∴ f ≦ U(S, T) – 0
= U(S, T)

最小カット問題

性質2：任意のs-tカットとフローに対し
フロー量 ≦ カットの容量

LPの弱双対定理に対応

⇒ **カットの容量は最大フローのフロー値に対する上界を与える**

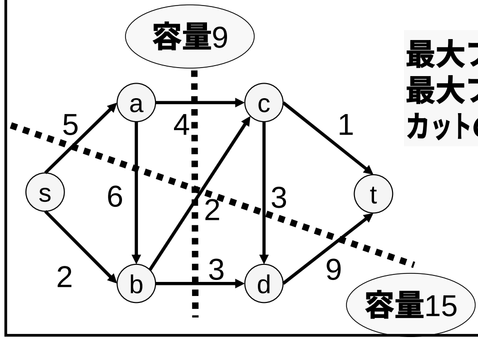
より良い上界を求めたい⇒最小カット問題

最小カット問題
入力：グラフ G = (V, E), **頂点** s, t ∈V
出力：容量最小の s-t **カット (最小カット)**

最小カット問題は最大フロー問題の双対問題

最小カット問題

最小カット問題
入力：グラフ G = (V, E), **頂点** s, t ∈V
出力：容量最小の s-t **カット (最小カット)**



最大フロー最小カット定理
最大フローのフロー値と最小カットの容量は等しい

以降はこの定理の証明を行う

最大フロー最小カット定理の証明 (その1)

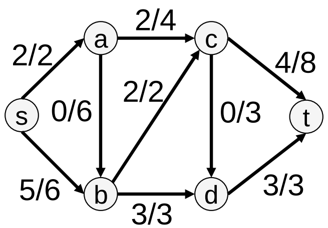
フロー増加法で求めたフロー(x_{ij} | (i,j) ∈ E)**は最大フロー**

もし f = U(S, T) **を満たす**

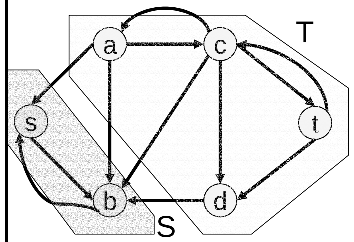
s-t **カット**(S, T)**が存在すれば，それは最小カット**

フロー増加法の終了時に、
このような s-t**カットが実際に存在することを示す**

最大フロー最小カット定理の証明 (その2)



フロー増加法により得られたフローに対して残余ネットワークを作る

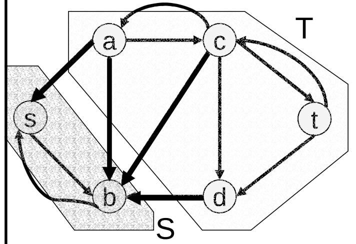


残余ネットワークには s-t **パスが存在しない**

⇓

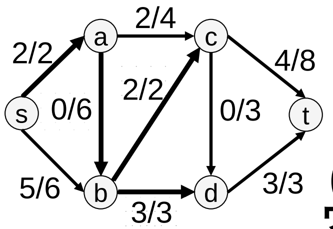
S = **残余ネットワークにおいて** s **から到達可能な頂点集合**
T = V – S
に対し、(S, T) **は** s-t **カット**

最大フロー最小カット定理の証明（その3）



S = s から到達可能な頂点集合
T = V – S

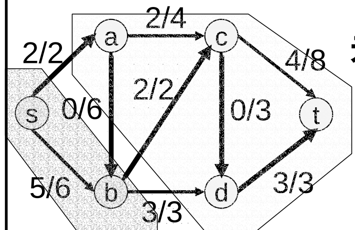
残余ネットワークにおいて
SからTに向かう枝は存在しない



元のネットワークにおいて
SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$
TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$

（これが成り立たないと、残余ネットワークにSからTへの枝が出てくる）

最大フロー最小カット定理の証明（その4）



元のネットワークにおいて
SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$
TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$

$x(S, T) = \Sigma\{x_{ij} \mid (i,j)$ はSからTへ向かう枝$\}$
$= \Sigma\{u_{ij} \mid (i,j)$ はSからTへ向かう枝$\}$
$x(T, S) = \Sigma\{x_{ij} \mid (i,j)$ はTからSへ向かう枝$\} = 0$
$\therefore\ x(S, T) - x(T, S) = U(S, T)$

性質1より $f = x(S,T) - x(T, S)$

$\therefore\ f = U(S, T)$ （証明終わり）

最大フロー最小カット定理

定理：フロー増加法により求められたフローは最大フロー
S = 残余ネットワークで s より到達可能な頂点集合
T = V – S
とすると、(S, T) は最小s-t カット
さらに $f = U(S,T)$ が成り立つ

定理：最大フロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ と最小s-tカット(S,T)に対し
$f = U(S,T)$

3．最小費用フロー問題

最小費用フロー問題の定義

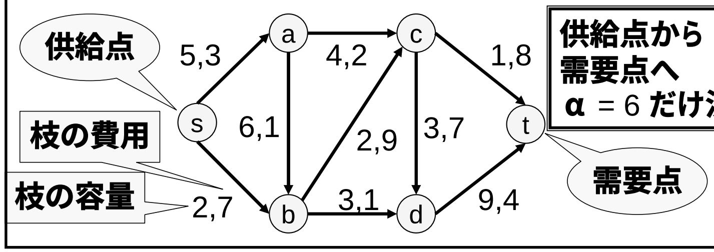
入力：有向グラフ G = (V, E)

供給点 $s \in V$, **需要点** $t \in V$,

需要（供給）量 $\alpha > 0$

各枝 $(i, j) \in V$ **の容量** $u_{ij} \geqq 0$, **費用** c_{ij}

出力：需要供給を満たすフローで総費用が最小のもの



供給点から需要点へ α = 6 だけ流す

応用例：研究室配属問題（その1）

- **各研究室に学生数人を割り当てる**

  学生A,B,C,D**の4人を研究室**X,Y**へ**

- **各研究室に配属できる人数には上限がある**

	X研究室	Y研究室
定員	3	3

- **学生の満足度の合計を最大にしたい**

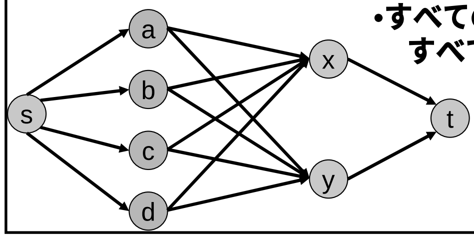
満足度	A	B	C	D
X	6	8	5	9
Y	9	1	5	3

応用例：研究室配属問題（その2）

最小費用フロー問題に変形

- **各学生に対応する頂点** a, b, c, d
- **各研究室に対応する頂点** x, y
- **供給点** s, **需要点** t

- **供給点から学生頂点への枝** (s, a), (s, b), …
- **研究室頂点から需要点への枝** (x, t), (y, t)



- **すべての学生頂点から すべての研究室頂点への枝**

  (a, x), (a, y), (b, x), …

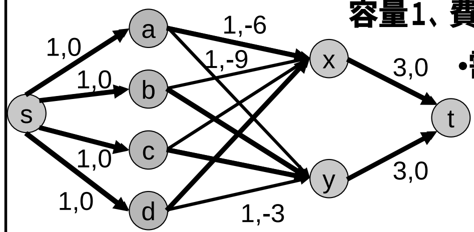
応用例：研究室配属問題（その3）

- **供給点から学生頂点への枝ー容量1、費用0**
- **研究室頂点から需要点への枝**

  ー容量＝研究室の定員、費用0

- **学生頂点から研究室頂点への枝**

  容量1、費用＝（ー1）×満足度



- **需要（供給）量＝学生数**

学生A,D→X**研究室**

学生B,C→Y**研究室**

この問題の（整数値）フロー⇔定員を満たす配属方法

フローの費用⇔（ー1）×学生の満足度の合計

∴最小費用フロー問題に変形できた

最小費用フロー問題の定式化

最小化　$\Sigma\{ c_{ij}\, x_{ij} \mid (i,j) \in E \}$

各枝の費用
×フロー量　の和

条件　$0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$　$((i,j) \in E)$

各枝の容量条件

$\Sigma\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る$\}$ － $\Sigma\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る$\} = 0$

$(k \in V - \{s, t\})$

各頂点での
流量保存条件

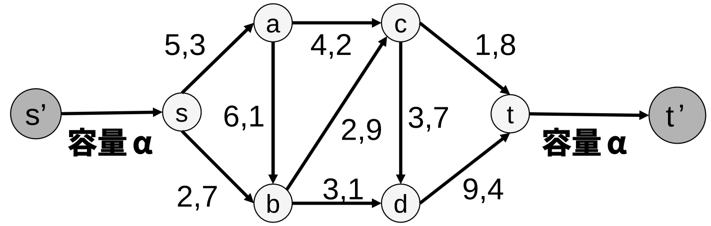
需要供給量に
関する条件

$\Sigma\{x_{sj} \mid (s,j)$ は s から出る$\}$ － $\Sigma\{x_{is} \mid (i,s)$ は s に入る$\} = \alpha$

$\Sigma\{x_{tj} \mid (t,j)$ は t から出る$\}$ － $\Sigma\{x_{it} \mid (i,t)$ は t に入る$\} = -\alpha$

需要供給を満たすフローの求め方

(1) 人工問題として最大フロー問題を作る
(2) 人工問題の最大フローにおいて
　$f = \alpha$　⇒　現在のフローは需要供給を満たす
　$f < \alpha$　⇒　需要供給を満たすフローは存在しない

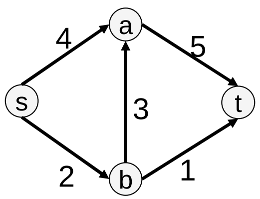


各枝の費用は無視

レポート問題

次の2つの最大フロー問題に対して、
(1) 定式化せよ
(2) フロー増加法で最大フローを求めよ
　(途中の残余ネットワークやフローも書くこと)
(3) 最小 s-t カットを求めよ

問題1



問題2