数理計画法　第2回

2．1　線形計画問題と その標準形
2．2　双対問題

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　助教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

先週の内容の復習

線形計画問題（ＬＰ）
ー目的関数が線形関数，制約式も線形式の最適化問題

- ＬＰの不等式標準形 ◆目的は最小化
  ◆制約式は「左辺≧右辺」の形
  ◆各変数は非負

最小化　$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_n \geqq 0$

不等式標準形への変形

命題2．1：任意のＬＰは不等式標準形に変換できる

次の４つの変換法を利用

【式の同値変形】　等式を二つの不等式で表現

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b,\quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge b$$

【目的関数のー１倍】　最大化から最小化へ

$$\text{最大化} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \Longrightarrow \quad \text{最小化} \quad -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

【制約のー１倍】　不等式を “≦” から “≧” へ

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \quad \Longrightarrow \quad -\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge -b$$

不等式標準形への変形

【差による表現】
非負制約のない変数を２つの非負変数で表現

x_j （非負制約なし） $\Longrightarrow$ $x_j = x_{j1} - x_{j2},\ x_{j1} \geqq 0,\ x_{j2} \geqq 0$

不等式標準形への変形の例

最大化 $3x + 2y$
条件 $x + y = 1$
$x \geqq 0$

⇒

最大化 $3x + 2(y_1 - y_2)$
条件 $x + (y_1 - y_2) = 1$
$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

⇒

最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$
条件 $x + (y_1 - y_2) = 1$
$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

⇒

最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$
条件 $x + (y_1 - y_2) \leqq 1$
$x + (y_1 - y_2) \geqq 1$
$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

⇒

最小化 $-3x - 2(y_1 - y_2)$
条件 $-x - (y_1 - y_2) \geqq -1$
$x + (y_1 - y_2) \geqq 1$
$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

「差による表現」による変形の妥当性

【差による表現】

x_j（非負制約なし） ⇒ $x_j = x_{j1} - x_{j2},\ x_{j1} \geqq 0,\ x_{j2} \geqq 0$

変換前の問題：P_1　　変換後の問題：P_2

P1とP2は本質的に等価

- $(s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_n)$：$P_1$の許容解

⇒ $(s_1, \ldots, s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_n)$：$P_2$の許容解，目的関数値同じ

ただし $s_{j1} = s_j,\ s_{j2} = 0$ （$s_j \geqq 0$ のとき）

$s_{j1} = 0,\ s_{j2} = -s_j$ （$s_j < 0$ のとき）

- $(t_1, \ldots, t_{j1}, t_{j2}, \ldots, t_n)$：$P_2$の許容解

⇒ $(t_1, \ldots, t_{j1} - t_{j2}, \ldots, t_n)$：$P_1$の許容解，目的関数値同じ

等式標準形

- ＬＰの等式標準形

◆目的は最小化
◆制約は等式
◆各変数は非負

最小化 $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

条件 $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$

$\cdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_n \geqq 0$

等式標準形への変形

命題２．２：任意のＬＰは等式標準形に変換できる

- 任意のＬＰは不等式標準形に変換できる（命題２．1）
- 不等式「左辺≧右辺」を等式へ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \ge 0$$

新しい非負変数 x_{n+i} を利用
（スラック変数）

双対問題

- ＬＰの最適値を下から見積もりたい
  (最適値の下界値の計算)

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$ ⇨ 制約を足し合わせてみる

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$ ①

$-2x_1 \quad - 4x_3 \geqq -4$ ②

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$ ③

$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_3 \geqq 0$

•目的関数≧②×3＋③＝ $-2x_1 - 3x_2 - 11x_3 \geqq -13$

•目的関数≧①×0.5＋②×0.5＝ $-2x_1 - x_2 - 1.5x_3 \geqq -4$

より良い下界

双対問題

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$ ①

$-2x_1 \quad - 4x_3 \geqq -4$ ②

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$ ③

$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_3 \geqq 0$

より一般に，非負実数
y_1, y_2, y_3 を使うと

①×y_1＋②×y_2＋③×y_3
＝$(-2y_1 - 2y_2 + 4y_3)x_1 + (-2y_1 - 3y_3)x_2 + (y_1 - 4y_2 + y_3)x_3$
$\geqq -4y_1 - 4y_2 - y_3$

$$\left.\begin{array}{l} -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2 \\ -2y_1 \quad - 3y_3 \leqq -1 \\ y_1 - 4y_2 + y_3 \leqq -1 \end{array}\right\}$$

が成り立つならば
目的関数≧$-4y_1 - 4y_2 - y_3$

双対問題

最も大きな下界値を求めたい⇒新たなＬＰ

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件 $-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2$

$-2y_1 \quad - 3y_3 \leqq -1$

$y_1 - 4y_2 + y_3 \leqq -1$

もとの問題に
対する
双対問題

もとの問題‥‥主問題

主問題と双対問題

主問題	双対問題
最小化 $c_1x_1+\cdots+c_nx_n$	最大化 $b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m$
条件 $a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$	条件 $a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$
$a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$	$a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m \leqq c_2$
$\cdots$	$\cdots$
$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$	$a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_n \leqq c_n$
$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$	$y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

行列表現

主問題	双対問題
最小化 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$	最大化 $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$
条件 $A\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{b}$	条件 $A^T\boldsymbol{y} \leqq \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}$

主問題と双対問題

性質：双対問題の双対問題は主問題に一致する

証明→レポート問題

手順 (1) 双対問題を不等式標準形に書き換え

(2) 書き換えた問題の双対問題をつくる

(3) 得られた双対問題を変換すると
もとの問題に一致することを確かめる．

等式標準形の双対問題

- ＬＰの等式標準形

最小化 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

条件 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,2,..,m)$

$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,\dots,n)$

不等式標準形に変換

最小化 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

条件 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge -b_i \quad (i = 1,2,..,m)$

$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,\dots,n)$

等式標準形の双対問題

双対問題をつくる

最大化 $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i' + \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i''$

条件 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i' + \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i'' \le c_j \quad (j = 1,2,..,n)$

$y_i' \ge 0, \quad y_i'' \ge 0 \quad (i = 1,2,\dots,m)$

$y_i' - y_i''$ を
非負制約なし変数
y_i に置き換え

最大化 $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

条件 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j \quad (j = 1,2,..,n)$

等式標準形のＬＰに対する双対問題

諸定理 ー ＬＰの基本定理

不等式標準形のＬＰに対し

- 実行可能⇔許容解が存在する
- 実行不可能⇔許容解が存在しない

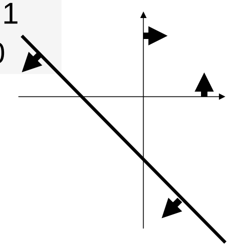
最小化 x + 2y
条件 -x - y≧ -3
x, y≧ 0

実行可能

(1, 1) は許容解

最小化 x + 2y
条件 -x - y≧ 1
x, y≧ 0

実行不可能



ＬＰの基本定理（その２）

実行可能なＬＰは

- 有界　⇔　目的関数値がある定数以下にならない
- 非有界　⇔　目的関数値をいくらでも小さく出来る
（最小化の場合）

最小化	$x + 2y$
条件	$-x - y \geqq -3$
	$x, y \geqq 0$

有界

目的関数値≧０

最小化	$-x - y$
条件	$x + y \geqq 0$
	$x, y \geqq 0$

非有界

任意の正数αに対し、

（α，α）は許容解、

目的関数値＝－2α

ＬＰの基本定理（その３）

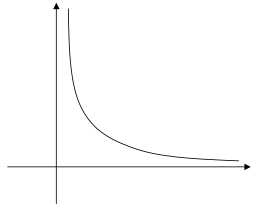
定理２．１（基本定理）
任意のＬＰに対し、
実行可能かつ有界　⇒　最適解が存在

※非線形計画の場合は成り立つとは限らない！

最小化	y
条件	$xy \geqq 1$
	$x, y \geqq 0$

最適値＝０

でも $y = 0$ なる許容解はない



弱双対定理（その１）

定理２．２（弱双対定理）
x: 主問題の許容解, y: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \geq \quad \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

主問題の目的関数値　　双対問題の目的関数値

弱双対定理（その２―証明）

シグマの順番を換える

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

最大化　$b_1y_1+\cdots+b_my_m$

条件　$a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$

$a_{12}y_1+\cdots+a_{m2}y_m \leqq c_2$

$\cdots$

$a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_n \leqq c_n$

$y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

弱双対定理（その３ー系）

系２．１
主問題が非有界 ⇒ 双対問題は実行不可能
双対問題が非有界 ⇒ 主問題は実行不可能

証明: 対偶 （双対：実行可能⇒主：有界） を示す

双対問題が実行可能と仮定

y： 双対問題の許容解、 $\alpha = \Sigma b_i y_i$

弱双対定理より、主問題の任意の許容解 x に対し

$\Sigma c_j x_j \geqq \alpha$ ∴ 主問題は有界

弱双対定理（その４ー系）

系２．２
x: 主問題の許容解, y: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

⇒ x: 主問題の最適解、y：双対問題の最適解

証明→レポート問題

弱双対定理（その５ー系）

例２．３

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件
$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$
$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$
$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$
$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件
$-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2$
$-2y_1 - 3y_3 \leqq -1$
$y_1 - 4y_2 + y_3 \leqq -1$
$y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0$

x = (2, 0, 0): 許容解　　y = (3/5, 2/5, 0): 許容解

$-2 \times 2 - 0 - 0 = -4 = -4 \times (3/5) - 4 \times (2/5) - 0$

⇒ 系２．２より、 x, y はそれぞれ最適解

双対定理

定理２．３：
主問題または双対問題が最適解をもつ
⇒ 他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

証明 → 後日

主問題と双対問題の答えの組合せ

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="3"></td><td colspan="3">双対問題</td></tr>
<tr><td colspan="2">実行可能</td><td rowspan="2">実行
不可能</td></tr>
<tr><td>最適解</td><td>非有界</td></tr>
<tr><td rowspan="3">主
問
題</td><td rowspan="2">実行可能</td><td>最適解</td><td>○
(双対定理)</td><td>×
(系2．1)</td><td>×
(双対定理)</td></tr>
<tr><td>非有界</td><td>×
(系2．1)</td><td>×
(系2．1)</td><td>○
(系2．1)</td></tr>
<tr><td colspan="2">実行不可能</td><td>×
(双対定理)</td><td>○
(系2．1)</td><td>○</td></tr>
</table>

今週のレポート問題

- 80ページ問2．1
- 81ページ問2．4
- 双対問題 (2．7) の双対問題が主問題 (2．6) に一致することを示せ．
- 81ページ問2．8 (系2.2の証明)

締め切りは　10月27日 (水)
提出は授業開始後15分まで，それ以降の提出は認めない

来週 (10月20日) は休講です．