数理計画法　最終回

組合せ最適化問題

担当：　塩浦昭義
(情報科学研究科　助教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

組合せ最適化問題

最適化問題：条件を満たす解の中で
　　　　　一番よいものを求める問題
組合せ最適化：解が順序や割当のような
　　　　　組合せ的な性質を持つ最適化問題

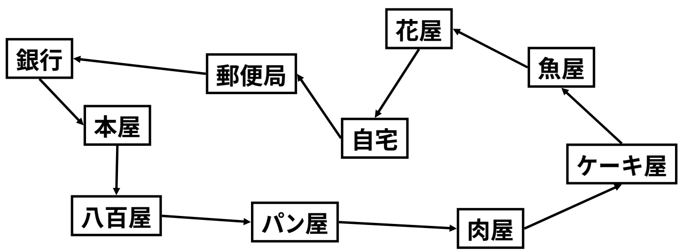
- 配送計画（コンビニへの商品配達、宅配）
- 工場での製品の機械への割当
- カーナビのルート探索
- スポーツの対戦表の作成
- 病院の看護師の勤務表作成

…

⇒ 条件を満たす解を列挙できる

例：巡回セールスマン問題

郵便局、銀行、魚屋、本屋、八百屋、肉屋、パン屋、ケーキ屋、花屋に用事がある。どの順番で回ると無駄が少ないだろう？

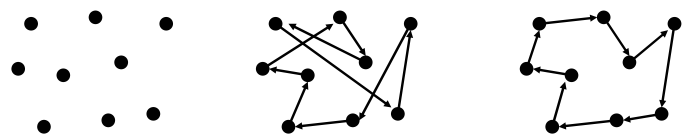


例：巡回セールスマン問題

与えられるデータ：n 個の目的地と目的地間の距離

条件：すべての目的地を1度ずつ通り元の地点に戻る
　　　（巡回路）

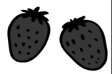
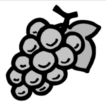
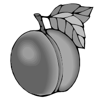
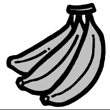
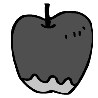
目標：総距離をできるだけ短くしたい

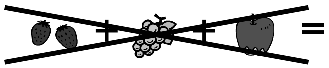


$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ 通りの巡回路を列挙してすべて調べたら解ける

例：ナップサック問題

予算の範囲で果物を買って
満足度を最大にしたい

予算 1000円					
満足度	80	50	60	10	20
価格	400	400	500	100	300

 ＝ 価格1100円（予算オーバー）

 ＝ 価格1000円，満足度120

 ＝ 価格 900円，満足度140

ナップサック問題

与えられるデータ：n 個の商品の満足度と値段および予算上限

条件：選んだ商品の値段の合計が予算上限を超えない

目標：選んだ商品の満足度合計をできるだけ大きくしたい

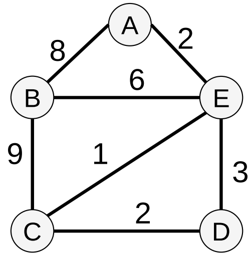
各商品は選ぶか否かの 2 通り → 商品の組合せの数は

$n = 1$ ならば 2 通り（なし, a）
$n = 2$ ならば $2 \times 2 = 4$ 通り（なし, a, b, ab）
$n = 3$ ならば $2 \times 2 \times 2 = 8$ 通り（なし, a, b, c, ab, bc, ca, abc）
…

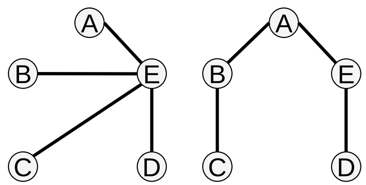
2^n 通りの商品の組合せを列挙してすべて調べたら解ける

例：最小木問題

枝の長さの和が最小の木を求める

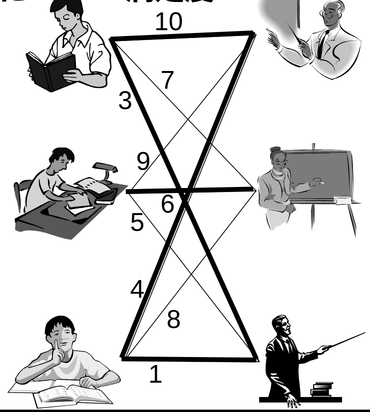


木の例



例：最大重みマッチング

- 各研究室に学生一人を割り当てる
- 学生の満足度の合計を最大に



列挙すれば解ける？

可能な巡回路の数は $n!$ 通り
可能な商品の組合せは 2^n 通り

n	$n!$	2^n
10	3,628,800	1,024
20	2.4×10^{18}	1,048,576
30	2.7×10^{32}	1,073,741,824

→ 列挙に１００億年はかかる

$n!$ や 2^n : 指数関数 → 急激に増加 (爆発) する

⇒ 効率的なアルゴリズムの必要性

解きやすい問題･解きにくい問題

●問題の解きやすさによって、解く方針が変わる
●解きやすい問題ー多項式時間で解ける
　例：最小木、最大重みマッチング
　　⇒高速なアルゴリズムで最適解を求める

解きやすい問題･解きにくい問題

●解きにくい問題
　ー多項式時間で解くことが不可能 (NP困難)
　例：ナップサック、巡回セールスマン
⇒基本的には全ての解を調べる必要あり (解の全列挙)
　■近似解法ー短い時間で良い解を求める
　　(最適解が得られるとは限らない)
　■厳密解法ー長い時間を使っても良いから
　　必ず最適解を求める

以下、ナップサック問題を例に厳密解法の一つを紹介

ナップサック問題の定式化

問題を変数･式を使って表現

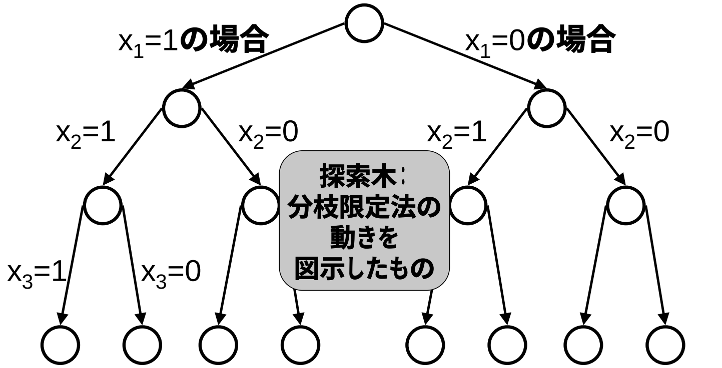
1000円	いちご	ぶどう	もも	バナナ	りんご
満足度	80	50	60	10	20
価格 (単位：百円)	4	4	5	1	3

変数 $x_1, x_2, \ldots, x_5$ の導入
ー $x_1=1$:いちごを選ぶ、$x_1=0$:選ばない

最大化　$80x_1+50x_2+60x_3+10x_4+20x_5$
条件　$4x_1+4x_2+5x_3+x_4+3x_5 \leqq 10$
　　$x_1, x_2, \ldots, x_5 \in \{0, 1\}$

分枝限定法

•厳密解法のひとつ
•再帰的に場合分け (分枝操作) しながら、より良い解を探索

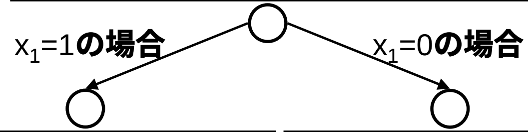


部分問題

•部分問題：場合分けにおいて変数を固定したときに得られる問題のこと

例

最大化 $80x_1+50x_2+60x_3+10x_4+20x_5$
条件 $4x_1+4x_2+5x_3+x_4+3x_5 \leqq 10$
$x_1, x_2, \ldots, x_5 \in \{0, 1\}$

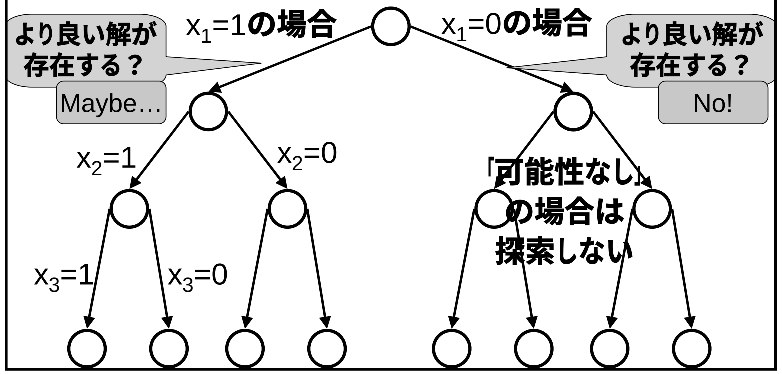


最大化 $80+50x_2+60x_3+10x_4+20x_5$
条件 $4x_2+5x_3+x_4+3x_5 \leqq 6$
$x_2, x_3, \ldots, x_5 \in \{0, 1\}$

最大化 $50x_2+60x_3+10x_4+20x_5$
条件 $4x_2+5x_3+x_4+3x_5 \leqq 10$
$x_2, x_3, \ldots, x_5 \in \{0, 1\}$

分枝限定法

•場合分けのとき、各々の部分問題において、
「より良い解が得られる可能性」の有無を判定
可能性がなければ部分問題を解かない (限定操作)



限定操作のやり方その1

•部分問題の許容解が存在しない
⇒ より良い解は明らかに存在しない
⇒ 探索の必要なし (限定操作その1)

例 $x_1=x_2=x_3=1$ の場合の部分問題

最大化 $190+10x_4+20x_5$
条件 $x_4+3x_5 \leqq -3$
$x_4, x_5 \in \{0, 1\}$

⇒ $x_4 + 3x_5 \geqq 0$ なので許容解は存在しない
⇒ $x_1=x_2=x_3=1$ の場合は探索の必要なし

限定操作のやり方その2

•緩和問題：元の問題の制約を緩めたもの

例 $x_1, \ldots, x_5 \in \{0, 1\}$ ⇒ $0 \leqq x_1, \ldots, x_5 \leqq 1$

性質：最大化問題の場合，
元の問題の最適値 ≦ 緩和問題の最適値

•いま考えている部分問題の緩和問題の最適値 ≦ α
⇒この部分問題の許容解の目的関数値 ≦ α
•目的関数値がα以上の許容解が既に見つかっている
⇒この部分問題は探索の必要なし（限定操作その2）

限定操作のやり方その2

例 •目的関数値140の許容解(1,1,0,1,0)が既に見つかっているとする

•x_1=0の場合の部分問題

最大化 $50x_2+60x_3+10x_4+20x_5$
条件 $4x_2+5x_3+x_4+3x_5 \leqq 10$
$x_2, x_3, \ldots, x_5 \in \{0, 1\}$ → 緩和 $0 \leqq x_2, x_3, \ldots, x_5 \leqq 1$

緩和問題の最適解 (1, 1, 1, 0)
目的関数値 120 < 140
⇒ $x_1 = 0$ の場合は探索する必要ない

限定操作のやり方その3

•緩和問題の最適解が部分問題の許容解
⇒ 得られた解は部分問題の最適解
⇒ さらに場合分けをして探索する必要なし
（限定操作その3）

例 x_1=0の場合の部分問題の緩和問題

最大化 $50x_2+60x_3+10x_4+20x_5$
条件 $4x_2+5x_3+x_4+3x_5 \leqq 10$
$0 \leqq x_2, x_3, \ldots, x_5 \leqq 1$

緩和問題の最適解 (1, 1, 1, 0)
⇒ 各成分が0, 1 なので、$x_1 = 0$ の場合の最適解

ナップサック問題の緩和問題の解き方

最大化 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$
条件 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \leqq b$
$0 \leqq x_1, x_2, \ldots, x_n \leqq 1$

•この緩和問題は線形計画問題 ⇒ 単体法で解ける

もっと簡単な解き方

•$c_1/a_1 \geqq c_2/a_2 \geqq c_3/a_3 \geqq \cdots$ となるように要素を並び替える
•$a_1+\cdots a_{k-1} < b \leqq a_1+\cdots a_k$ を満たす k を求める
•$x_1 = \cdots = x_{k-1} = 1,\ x_k = (b - a_1 - \cdots - a_{k-1})/a_k,$
$x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ が最適解

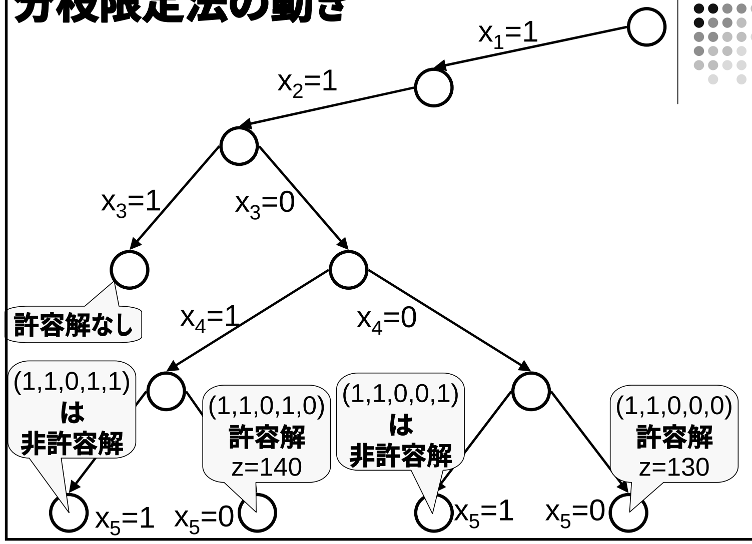
ナップサック問題の緩和問題の解き方

例

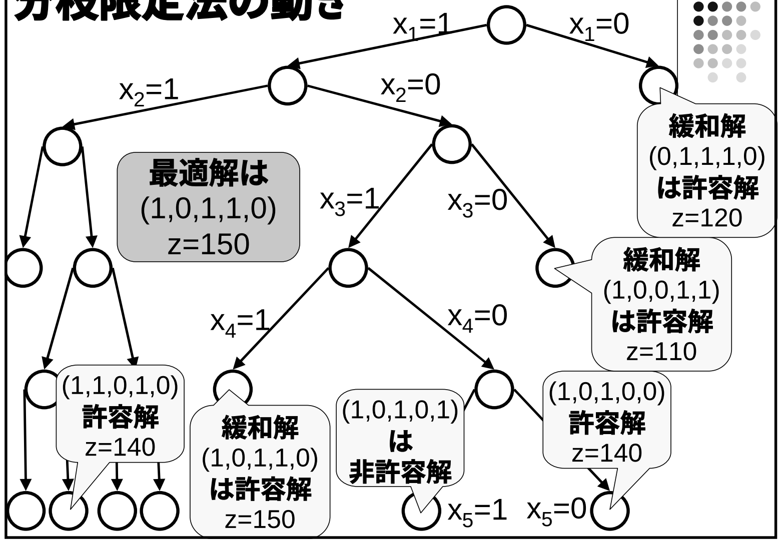
最大化 $80x_1+50x_2+60x_3+10x_4+20x_5$
条件 $4x_1+4x_2+5x_3+x_4+3x_5 \leqq 10$
$0 \leqq x_1, x_2, \ldots, x_5 \leqq 1$

- $c_1/a_1 \geqq c_2/a_2 \geqq c_3/a_3 \geqq \cdots$ **となるように要素を並び替える**
  既に条件を満たしている
- $a_1+\cdots a_{k-1} < b \leqq a_1+\cdots a_k$ **を満たす** k **を求める**
  k = 3
- $x_1 = \cdots = x_{k-1} = 1,\ x_k = (b - a_1 - \cdots - a_{k-1})/a_k,$
  $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ **が最適解**
  (1, 1, 2/5, 0, 0)

分枝限定法の動き



分枝限定法の動き



期末試験について

- **日程と時間**：2**月**9**日（金）**
  午後2**時**40**分～**4**時**10**分**
- **場所：講義棟** 205**号室**
- **出題範囲：ネットワーク計画および非線形計画**
  （組合せ最適化は入りません）
- **座席はこちらで指定**
- **持ち込みは一切不可**