

学籍番号	名前

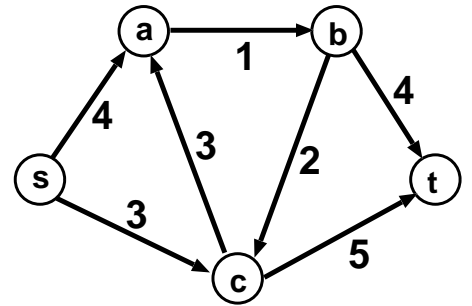
2004年度 数理計画法 期末試験問題 [50点満点]
平成17年2月9日(水) 14時40分～16時10分(90分間)

注意事項

1. 講義ノート、参考図書、ノート、電卓、計算機などの持込みは不可。
2. 解答は各設問の下、もしくは右側のページに書くこと。
3. 試験問題は全部でA4用紙6枚からなる。最後の1枚は切り取って計算用紙として使っても良い。

問題 1.

右図のネットワークにおいて、頂点 s から t への最大フローを求めたい。なお、各枝の数値はその枝の容量を表している。



(a). この最大フロー問題を定式化せよ。「最大化... 条件...」の形で書くこと。省略せずに全ての条件を書くこと。

ここで s - t カット $(S, T) = (\{s, a\}, \{t, b, c\})$ に注目する。

(b). (a) で定式化した最大フロー問題の条件式を利用して、次の式が成り立つことを証明しなさい。

$$\begin{aligned} & (S \text{ から } T \text{ へ向かう枝を流れるフロー量の総和}) - (T \text{ から } S \text{ へ向かう枝を流れるフロー量の総和}) \\ & = (\text{需要点 } t \text{ に流れ込むフロー量}) \end{aligned}$$

s - t カット (S, T) の容量 $U(S, T)$ は「 $U(S, T) = (S \text{ から } T \text{ へ向かう枝の容量の総和})$ 」と定義される。

(c). (b) の結果を利用して、不等式「 $U(S, T) \geq (\text{需要点 } t \text{ に流れ込むフロー量})$ 」が成り立つことを証明しなさい。

(d). この問題の最大フローと最小カットを求めなさい。途中の計算で現れる残余ネットワークも書くこと。

問題 1 の解答欄

問題 1 の解答欄

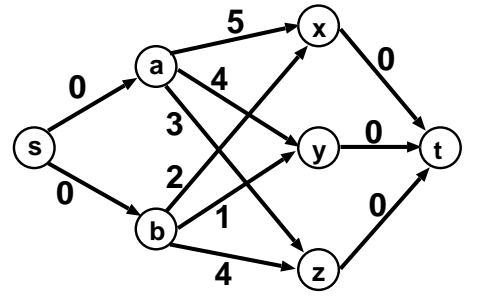
問題 2.

右図のネットワークにおける最小費用フローを求めたい。

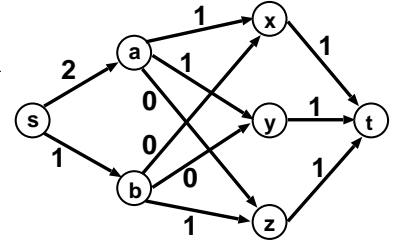
t における需要量 (s における供給量) は 3 とする。

各枝の数値は、その枝の費用を表す。

枝 $(s, a), (s, b)$ の容量は 2, それ以外の枝の容量はすべて 1 とする。



負閉路消去法を用いて、この問題の最小費用フローを求めよ。ただし、右図のフローを初期フローとすること。途中の計算過程 (特に残余ネットワーク) も省略せずに書くこと。



問題 2 の解答欄

問題 2 の解答欄

問題 3.

制約なしの非線形計画問題「最小化 $f(\boldsymbol{x})$ 制約 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 」について考える。

- (a). 関数 f の停留点の定義を述べなさい。
- (b). 関数 f の停留点が極小解であるための必要条件・十分条件として、ヘッセ行列を用いた条件が知られている。これらの条件を書きなさい。

以下、関数 $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{3}y^3 - 9y + 2$ の最小化について考える。

- (c). 関数 $f(x, y)$ の勾配ベクトルとヘッセ行列を求めなさい。
- (d). 関数 $f(x, y)$ の停留点を全て求めなさい。さらに、(b) で述べた条件を利用して、各々の停留点が極小解・極大解・鞍点のいずれであるか、分類しなさい。その際、理由もきちんと書くこと。

問題 3 の解答欄

問題 3 の解答欄

問題 4.

- (a). 制約なしの非線形計画問題に対する最急降下法のアルゴリズムについて簡単に説明しなさい。
- (b). 制約なしの非線形計画問題に対するニュートン法の長所と短所について簡単に説明しなさい。

(c). 関数 $f(x)$ と $g(x)$ はともに、変数 x に関する凸関数とする。

このとき、 $h(x) = f(x) + g(x)$ も変数 x に関する凸関数であることを証明しなさい。

(d). 次の非線形計画問題のKKT条件を求め、さらにラグランジュの未定乗数法を用いて最適解を求めよ。

$$(1) \begin{cases} \text{最小化} & x^2 + \frac{1}{2}y^2 \\ \text{条件} & 2x + 3y = 22 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \text{最小化} & x^2 + 2y^2 \\ \text{条件} & (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

問題 4 の解答欄

問題 4 の解答欄

