数理計画法 第6回目資料

塩浦 昭義*

平成 14 年 11 月 6 日

1　2段階単体法

基本定理 (定理 2.1) の証明

- 単体法は最小添字規則により有限回の反復で終了
- 2 段階単体法において

$$\text{第 1 段階が終了} \Longrightarrow \begin{cases} \text{問題は実行不可能} \\ \text{実行可能, 第 2 段階へ} \text{ — } \text{第 2 段階が終了} \Longrightarrow \begin{cases} \text{問題は非有界} \\ \text{最適解を求める} \end{cases} \end{cases}$$

□

*東北大学大学院 情報科学研究科 shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

2　辞書の双対性

主問題その 1

$$
\left\|
\begin{array}{lrcccccccc}
\text{最小化} & z & & & & & & & & \\
\text{条件} & z & = & \alpha & + & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + \cdots + & c_nx_n \\
& x_{n+1} & = & b_1 & + & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n \\
& x_{n+2} & = & b_2 & + & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& x_{n+m} & = & b_m & + & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n \\
& \multicolumn{9}{c}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \cdots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0,\ x_{n+2} \geq 0,\ \cdots, x_{n+m} \geq 0}
\end{array}
\right.
$$

その辞書

$$
\begin{array}{|c|cccc|}
\hline
\alpha & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\
\hline
b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
b_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

主問題の辞書が許容 $\iff b_i \geq 0\ (i = 1, 2, \ldots, m)$
主問題の辞書が最適 $\iff c_j \geq 0\ (j = 1, 2, \ldots, n)$

☆ 主問題を書き換え
主問題その 2

$$
\left\|
\begin{array}{lrrrrrrcrcr}
\text{最小化} & z & & & & & & & & & \\
\text{条件} & -z & & & & +c_1x_1 & +c_2x_2 & + \cdots & +c_nx_n & = & -\alpha \\
& & -x_{n+1} & & & +a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + \cdots & +a_{1n}x_n & = & -b_1 \\
& & & -x_{n+2} & & +a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + \cdots & +a_{2n}x_n & = & -b_2 \\
& & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & & & -x_{n+m} & +a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & + \cdots & +a_{mn}x_n & = & -b_m \\
& \multicolumn{10}{r}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \cdots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0,\ x_{n+2} \geq 0,\ \cdots, x_{n+m} \geq 0}
\end{array}
\right.
$$

☆ 双対問題を作る (変数として v, $y_{n+1},\ \ldots,\ y_{n+m}$ を使用)

双対問題 その 1

$$
\left\|\begin{array}{lccccccccccc}
\text{最大化} & -\alpha v & - & b_1 y_{n+1} & - & b_2 y_{n+2} & - & \cdots & - & b_m y_{n+m} & & \\
\text{条件} & -v & & & & & & & & & = & 1 \\
& & - & y_{n+1} & & & & & & & \leq & 0 \\
& & & & - & y_{n+2} & & & & & \leq & 0 \\
& & & & & & & \ddots & & & & \\
& & & & & & & & - & y_{n+m} & \leq & 0 \\
& c_1 v & + & a_{11} y_{n+1} & + & a_{21} y_{n+2} & + & \cdots & + & a_{m1} y_{n+m} & \leq & 0 \\
& c_2 v & + & a_{12} y_{n+1} & + & a_{22} y_{n+2} & + & \cdots & + & a_{m2} y_{n+m} & \leq & 0 \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
& c_m v & + & a_{1n} y_{n+1} & + & a_{2n} y_{n+2} & + & \cdots & + & a_{mn} y_{n+m} & \leq & 0
\end{array}\right.
$$

☆ $v = -1$ を代入して v を消去

双対問題 その 2

$$
\left\|\begin{array}{lcccccccccc}
\text{最大化} & -b_1 y_{n+1} & - & b_2 y_{n+2} & - & \cdots & - & b_m y_{n+m} & + & \alpha \\
\text{条件} & a_{11} y_{n+1} & + & a_{21} y_{n+2} & + & \cdots & + & a_{m1} y_{n+m} & \leq & c_1 \\
& a_{12} y_{n+1} & + & a_{22} y_{n+2} & + & \cdots & + & a_{m2} y_{n+m} & \leq & c_2 \\
& \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
& a_{1n} y_{n+1} & + & a_{2n} y_{n+2} & + & \cdots & + & a_{mn} y_{n+m} & \leq & c_m \\
& \multicolumn{9}{c}{y_{n+1} \geq 0,\ y_{n+2} \geq 0,\ \cdots,\ y_{n+m} \geq 0}
\end{array}\right.
$$

☆ 等式標準形に変形 (スラック変数として $y_1,\ \ldots,\ y_n$ を使用)

双対問題 その 3

$$
\left\|\begin{array}{lcccccccccccc}
\text{最小化} & & & -\alpha & + & b_1 y_{n+1} & + & b_2 y_{n+2} & + & \cdots & + & b_m y_{n+m} \\
\text{条件} & y_1 & = & c_1 & - & a_{11} y_{n+1} & - & a_{21} y_{n+2} & - & \cdots & - & a_{m1} y_{n+m} \\
& y_2 & = & c_2 & - & a_{12} y_{n+1} & - & a_{22} y_{n+2} & - & \cdots & - & a_{m2} y_{n+m} \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\
& y_n & = & c_n & - & a_{1n} y_{n+1} & - & a_{2n} y_{n+2} & - & \cdots & - & a_{mn} y_{n+m} \\
& \multicolumn{12}{c}{y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ \cdots,\ y_n \geq 0,\ y_{n+1} \geq 0,\ y_{n+2} \geq 0,\ \cdots,\ y_{n+m} \geq 0}
\end{array}\right.
$$

その辞書

$-\alpha$	b_1	b_2	$\cdots$	b_m
c_1	$-a_{11}$	$-a_{21}$	$\cdots$	$-a_{m1}$
c_2	$-a_{12}$	$-a_{22}$	$\cdots$	$-a_{m2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
c_n	$-a_{1n}$	$-a_{2n}$	$\cdots$	$-a_{mn}$

双対問題の辞書が許容 $\iff$ $c_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ($\iff$ 主問題の辞書が最適)
双対問題の辞書が最適 $\iff$ $b_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ($\iff$ 主問題の辞書が許容)

☆ **変数の対応** — x_j と y_j $(j = 1, 2, \ldots, n+m)$ が対応

x_j が基底変数 $\iff$ y_j が非基底変数
x_j が非基底変数 $\iff$ y_j が基底変数

単体法終了時の正当性

単体法終了時: 条件 $b_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $c_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ が成立
$\Longrightarrow$ 主問題の基底解 x^*, 双対問題の基底解 y^* はそれぞれ許容かつ最適,
x^* の目的関数値 $=$ y^* の目的関数値 $= \alpha$
$\Longrightarrow$ 系 2.2 より x^* は主問題の最適解 □

双対定理の証明

主問題が最適解をもつ
$\Longrightarrow$ 単体法で最適解 x^* が求められる
$\Longrightarrow$ 同時に双対問題の最適解 y^* も求められ, それらの目的関数値は一致 (上記の証明より) □

今週のレポート問題: 82 ページ問 2.15, 問 2.16
締切り: 11 月 13 日授業開始時 (既に提出した人は再び提出する必要なし)