レポート問題 (その 1)

それぞれの問題について, 全部解けなくてもかまわないので , なるべくたくさん解くように試みてください .

問題 **1** [全域木の特徴付け] 無向グラフ $G = (V, E)$ および辺の部分集合 $T \subseteq E$ に対し, 下記の 6 つの条件は等価であることが知られている .

1. T は G の全域木.
2. 部分グラフ (V, T) の任意の 2 頂点の間には単純路がただ一つ存在する.
3. 部分グラフ (V, T) は連結であり, かつ任意の辺を取り除くと非連結になる.
4. 部分グラフ (V, T) は連結であり, かつ $|T| = |V| - 1$.
5. 部分グラフ (V, T) は閉路をもたず, かつ $|T| = |V| - 1$.
6. 部分グラフ (V, T) は閉路をもたず, かつ任意に辺を一つ加えるとそのグラフは一つの閉路をもつ.

これらの 6 条件が等価であることを (なるべくたくさん) 示せ.

問題 **2** [基本カットに関する性質] $G = (V, E)$ は無向グラフ, $T \subseteq E$ は G の全域木とする. 各辺 $e \in E$ に対し, 非負の重み $w_e \geq 0$ が与えられているとする. 以下の主張が成り立つことを証明せよ.
(1) T の任意の辺 f に対し, 部分グラフ $(V, T \setminus \{f\})$ の連結成分は 2 つになる.
(2) T の任意の辺 $f \in T$ および基本カットの任意の辺 $e \in \mathrm{C}^*(T, f)$ に対し, 辺集合 $T \setminus f \cup e$ は全域木になる.
(3) T が最小全域木であることの必要十分条件は, 任意の $f \in T$ および $e \in \mathrm{C}^*(T, f)$ に対し, $w_f \leq w_e$ が成り立つことである.

問題 **3** [**2** 部グラフの特徴付け] 「無向グラフ $G = (V, E)$ が 2 部グラフであることの必要十分条件は , G が奇数長の閉路をもたないことである」という主張が成り立つことを証明せよ.

問題 **4** [最大マッチング・最小被覆定理] $G = (V, E)$ は無向グラフとする.
(1) G が 2 部グラフならば,

$$\max\{|M| \mid M : G \text{ のマッチング }\} = \min\{|U| \mid U : G \text{ の被覆 }\}$$

が成り立つことを示せ.
(2) 一般グラフの場合に上記の式が成り立たない例を示せ.