# 情報システム評価学
# ー整数計画法ー

第１１回目：切除平面法

塩浦昭義（東北大学 大学院情報科学研究科 准教授）

# 妥当不等式の利用

不等式 $ax \leq \beta$ はベクトル集合 $X \subseteq \mathbf{R}^n$ に対する**妥当不等式**

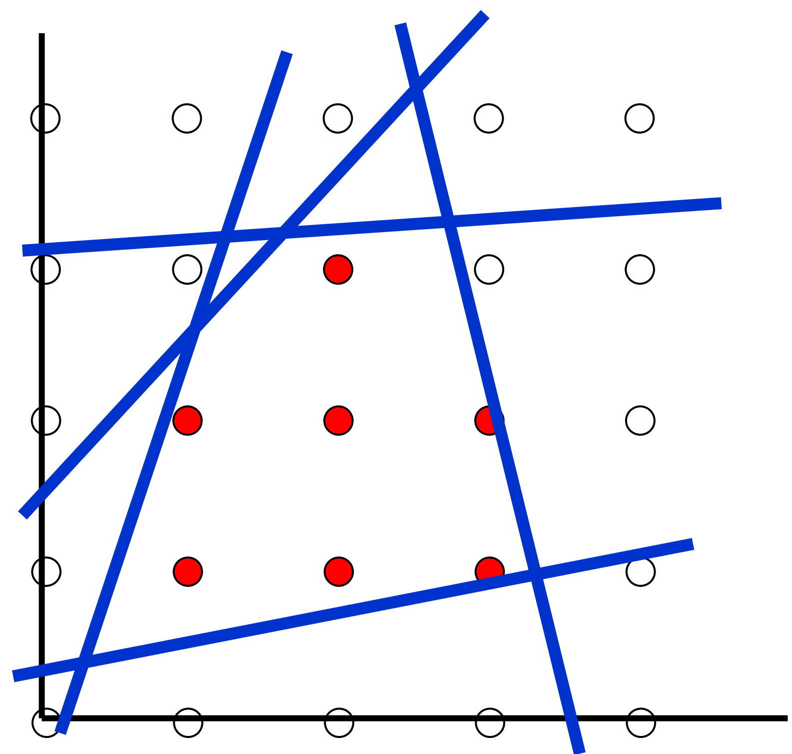
$\iff$ 全ての $x \in X$ に対して不等式 $ax \leq \beta$ が成り立つ

conv(X)の表現を求める代わりに,
解集合 X に対する妥当不等式を
繰り返し追加

➔ 得られる多面体は次第にconv(X)
近づく

➔LP最適解が次第にIP最適解に
近づく.
運が良ければIP最適解が得られる

「良い」妥当不等式とは?
妥当不等式の使い方は?



# 整数計画問題に対する妥当不等式の作り方

$\{x \mid Ax \le b,\ x:$ 非負整数ベクトル$\}$ に対する

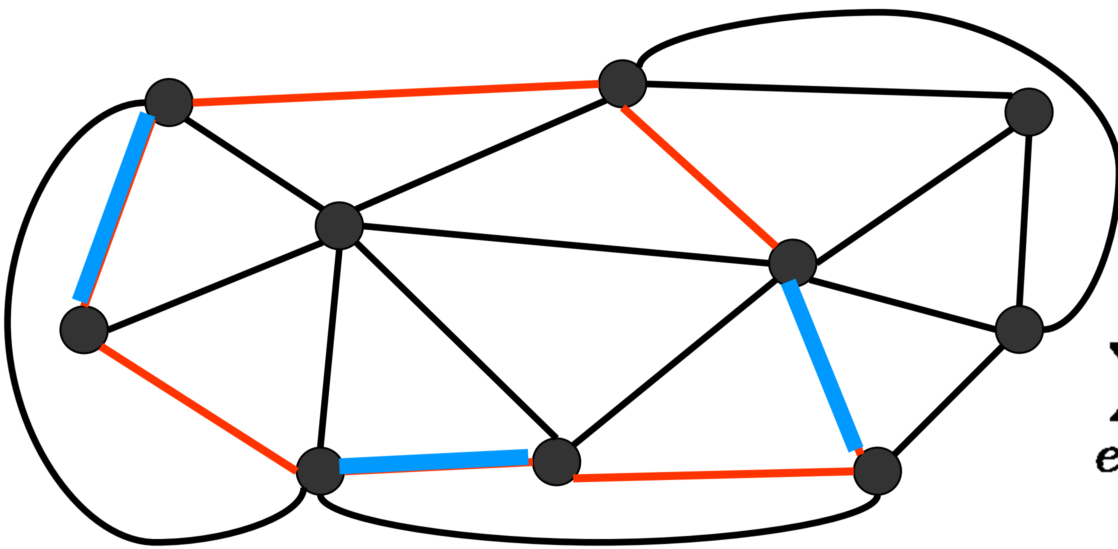
妥当不等式をどうやって作るか？

基本となる性質:

$\{x \in \mathbf{Z} \mid x \le b\}$ に対して $x \le \lfloor b \rfloor$ は妥当不等式

# マッチングの奇閉路不等式

- 無向グラフのマッチング
  ⇔各頂点に接する枝が高々一本である枝集合
- マッチング集合の妥当不等式（奇閉路不等式）
  - 奇数の長さ 2k +1 の閉路 T⊆E
  - Tに含まれるマッチングの枝は高々 k 本



$$\sum_{e\in T} x_e \le k$$

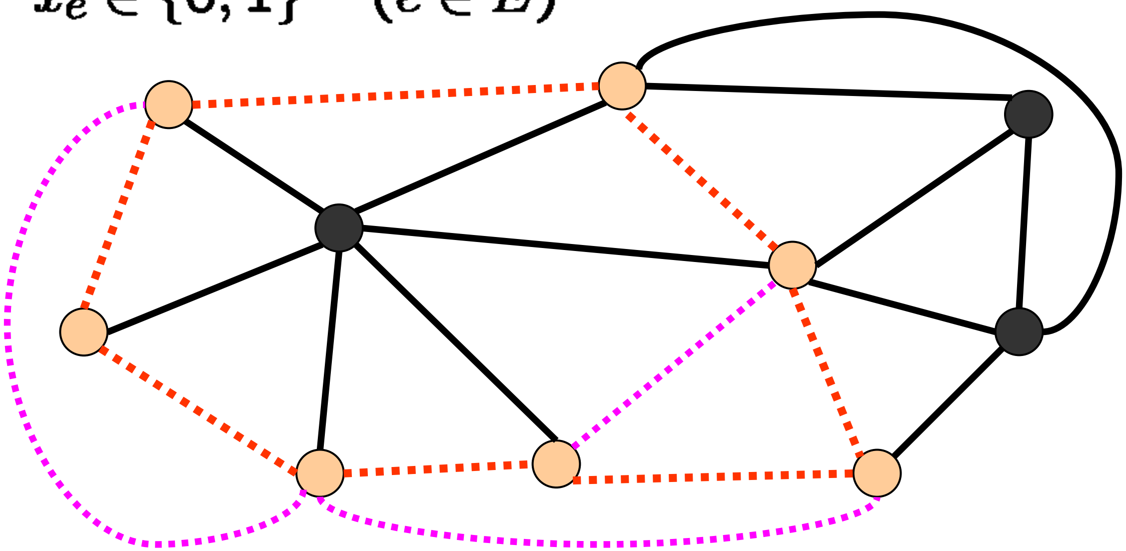
$(T$ は長さ $2k+1$ の閉路$)$

# マッチングに対する奇閉路不等式の導出

マッチング問題の定式化：

$$\sum_{e \in \delta(u)} x_e \leq 1 \quad (u \in V) \qquad\qquad (\delta(u) \equiv \text{頂点 } u \text{ に接続する枝集合})$$

$$x_e \in \{0,1\} \quad (e \in E)$$



T: 長さ 2k+1 の閉路
V(T): T に含まれる頂点集合
E(T): V(T)に含まれる頂点を結ぶ枝の集合

Tに含まれる各頂点に対する一番目の不等式を辺々加え，1/2をかける

$$\frac{1}{2}\sum_{u \in T}\sum_{e \in \delta(u)} x_e \leq \frac{2k+1}{2}$$

# マッチングに対する奇閉路不等式の導出

$E(T)$ の枝は2回カウントされるので

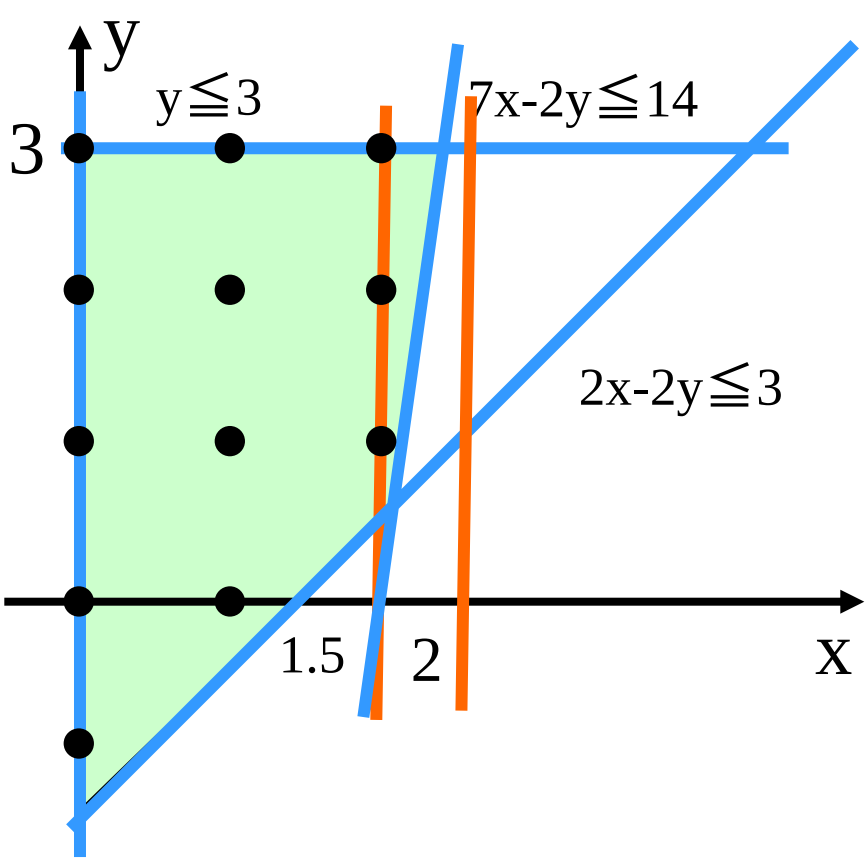
$$\frac{1}{2}\sum_{u\in T}\sum_{e\in\delta(u)} x_e = \sum_{e\in E(T)} x_e + \frac{1}{2}\sum_{e\in\delta(V(T),V\setminus V(T))} x_e$$

$(\delta(V(T), V\setminus V(T)) \equiv V(T)$ と $V-V(T)$ を結ぶ枝の集合$)$

$$\sum_{e\in E(T)} x_e \le \frac{1}{2}\sum_{u\in T}\sum_{e\in\delta(u)} x_e \le \frac{2k+1}{2}$$ は妥当不等式

左辺は整数になるので，$\sum_{e\in E(T)} x_e \le k$ は妥当不等式

# 整数計画問題に対する妥当不等式の導出例




$$(7x - 2y \le 14) \times \frac{2}{7} + (y \le 3) \times \frac{37}{63}$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{1}{63}y \le \frac{121}{21}$$

$$\Rightarrow 2x + \lfloor \frac{1}{63} \rfloor y \le \frac{121}{21}$$

$$\Rightarrow 2x \le \lfloor \frac{121}{21} \rfloor = 5$$

両辺に1/2をかける $\Rightarrow x \le 2.5$

$$\Rightarrow x \le \lfloor 2.5 \rfloor = 2$$

xに関してタイトな妥当不等式が得られた

# 整数計画問題に対する妥当不等式の導出：Chvátal-Gomory procedure

- ChvátalとGomoryによって提案された，整数計画問題の妥当不等式を得るための一般的な手法

解集合 $\{x \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \ (i=1,\ldots,m),\ x \ge 0, x \in \mathbf{Z}^n\}$

(i) 各不等式制約を $u_i \ge 0$ 倍して辺々加える

$$\sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \right) x_j \le \sum_{i=1}^{m} u_i b_i$$

(ii) 左辺の各項の係数を切り捨てる

$$\sum_{j=1}^{n} \left\lfloor \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \right\rfloor x_j \le \sum_{i=1}^{m} u_i b_i$$

(iii) 右辺の定数を切り捨てる

$$\sum_{j=1}^{n} \left\lfloor \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \right\rfloor x_j \le \left\lfloor \sum_{i=1}^{m} u_i b_i \right\rfloor$$

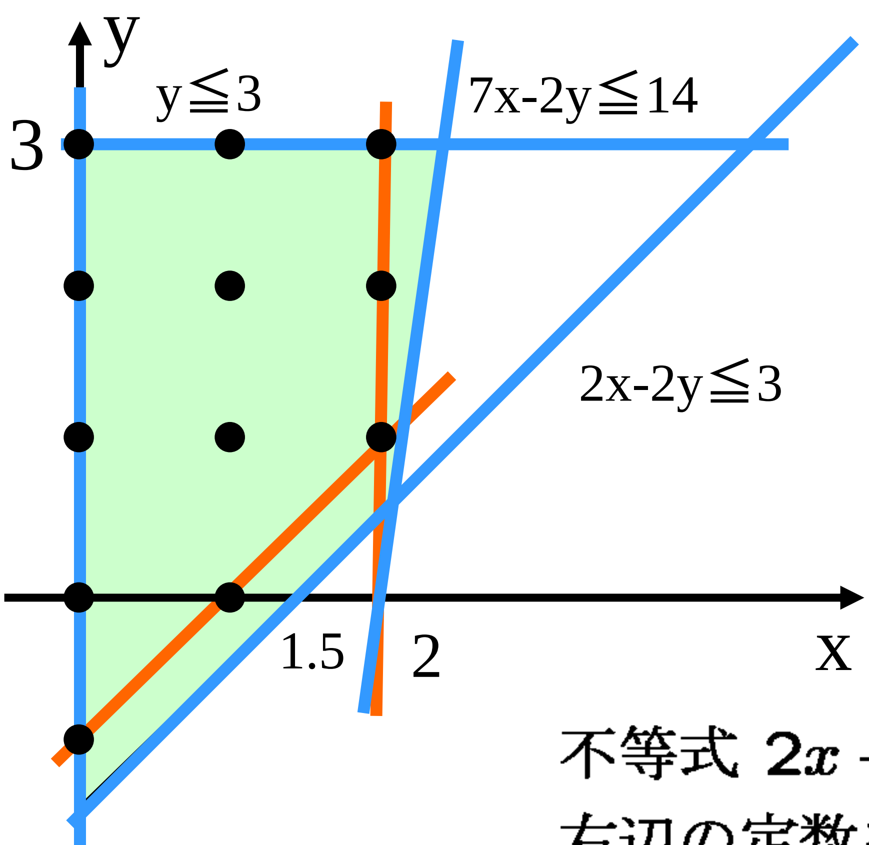
# 整数計画問題に対する妥当不等式の導出：Chvátal-Gomory procedure

- ChvátalとGomoryによって提案された，整数計画問題の妥当不等式を得るための一般的な手法
- この procedure は単純だが，とても有用

定理：任意の妥当不等式は，Chvátal-Gomory procedure を有限回適用することによって生成可能

証明は省略

# 整数計画問題に対する妥当不等式の導出例




$x \leq 2$ と $x - y \leq 1$ は
解集合の凸包を記述する妥当不等式

$x \leq 2$ はC-G procedure を
2回適用すると得られる

$x - y \leq 1$ はC-G procedure を
1回適用すると得られる

不等式 $2x - 2y \leq 3$ の両辺に1/2をかけて
右辺の定数を切り捨てると
$x - y \leq \lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$

# 妥当不等式を事前に追加する

- （分枝限定法などで）整数計画問題を解くときに，元々の定式化
$$X = \{x \mid Ax \le b,\ x \ge 0,\ x \in \mathbf{Z}^n\}$$
を使うのではなく，X の妥当不等式 $Cx \le d$ を追加した定式化
$$\{x \mid Ax \le b,\ Cx \le d,\ x \ge 0,\ x \in \mathbf{Z}^n\}$$
を使う
- 利点
  - LP緩和したときの領域が小さくなる
  - よりよい上界（下界）値
  - 整数解が見つかる可能性が高くなる
- 欠点
  - 不等式の数が多くなる➔LP緩和などの計算時間の増大

# 妥当不等式を事前に見つける方法

- 解集合

$$X = \{x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbf{Z}^n\}$$

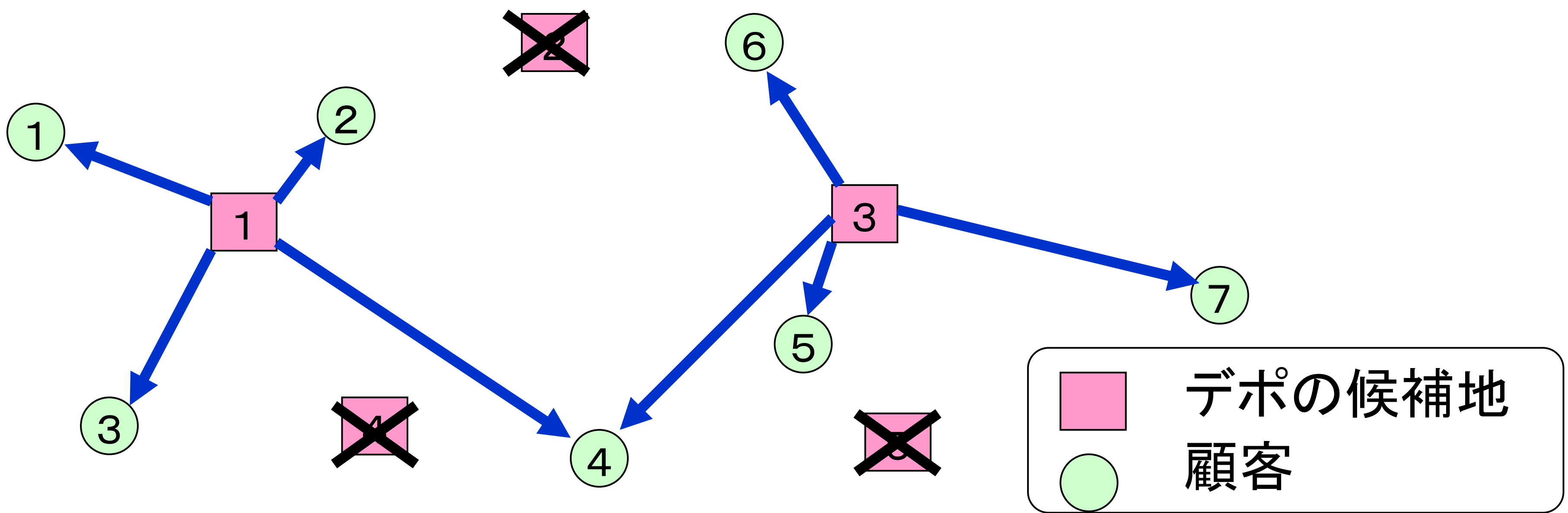
を $X = X_1 \cap X_2$ の形に表現

$$X_1 = \{x \mid A_1 x \leq b_1,\ x \geq 0,\ x \in \mathbf{Z}^n\}$$
$$X_2 = \{x \mid A_2 x \leq b_2,\ x \geq 0,\ x \in \mathbf{Z}^n\}$$

- $X_2$ に対する妥当不等式 Cx ≦ d を求める
- Cx ≦ d を X の定式化に追加

# 妥当不等式を事前に見つける方法：容量なし施設配置問題の例

- デポの候補地 $N=\{1, 2, \ldots, n\}$，顧客 $M=\{1, 2, \ldots, m\}$
- デポの幾つかを設置（デポ $j$ の設置コスト $f_j$）
- 全ての顧客をいずれかのデポに割り当て
  （顧客 $i$ をデポ $j$ に割り当て➔コスト $c_{ij}$）
- 目的：デポの設置コスト＋顧客の割当コストの最小化



# 妥当不等式を事前に見つける方法:容量なし施設配置問題の例

- 定式化

条件 $\displaystyle\sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \ (i \in M)$

— 顧客 $i$ はいずれか一つのデポに割り当てられる

$\displaystyle\sum_{i \in M} x_{ij} \le m y_j \ (j \in N)$

— デポ $j$ は設置されたとき，最大 $m$ 人を受け入れ可能

$x_{ij} \ge 0 \ (i \in M, j \in N)$

デポ $j$ に顧客 $i$ を割り当てるとき 1，そうでないとき 0

$0 \le y_j \le 1 \ (j \in N)$ デポ $j$ をつくるとき 1，そうでないとき 0

$x_{ij}, y_j \in \mathbf{Z}$

# 妥当不等式を事前に見つける方法: 容量なし施設配置問題の例

各 $j \in N$ に対し,

$$\sum_{i \in M} x_{ij} \le m y_j, \quad x_{ij} \ge 0 \ (i \in M), \quad 0 \le y_j \le 1$$

を満たす解集合 $X_j$ を考える

⇒ $X_j$ の凸包は

$$x_{ij} \le y_j \ (i \in M), \quad x_{ij} \ge 0 \ (i \in M), \quad 0 \le y_j \le 1$$

により与えられる

- 容量なし施設配置問題の新たな定式化

条件 $\displaystyle\sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \ (i \in M)$

$x_{ij} \le y_j \ (i \in M, \ j \in N)$

$x_{ij} \ge 0 \ (i \in M, j \in N), \ 0 \le y_j \le 1 \ (j \in N), \ x_{ij}, y_j \in \mathbf{Z}$

# 切除平面法のアイディア

- 整数ベクトル集合Xに対して様々な妥当不等式を生成可能，その数は指数個になることも
- 既知の妥当不等式を全て加える

  ➔LPを解くだけでも計算時間が膨大
- 有用な妥当不等式だけを追加してLPを解くことを反復

  ➔短い時間で整数最適解が得られることも

# 切除平面法の流れ

① 現在の定式化に対してLP緩和を解く➔緩和解 $x^t$ (t =反復回数)

② $x^t$ が整数解➔元のIPの最適解(終了)

③ $x^t$ が非整数解➔$x^t$ をカットする妥当不等式が必ず存在

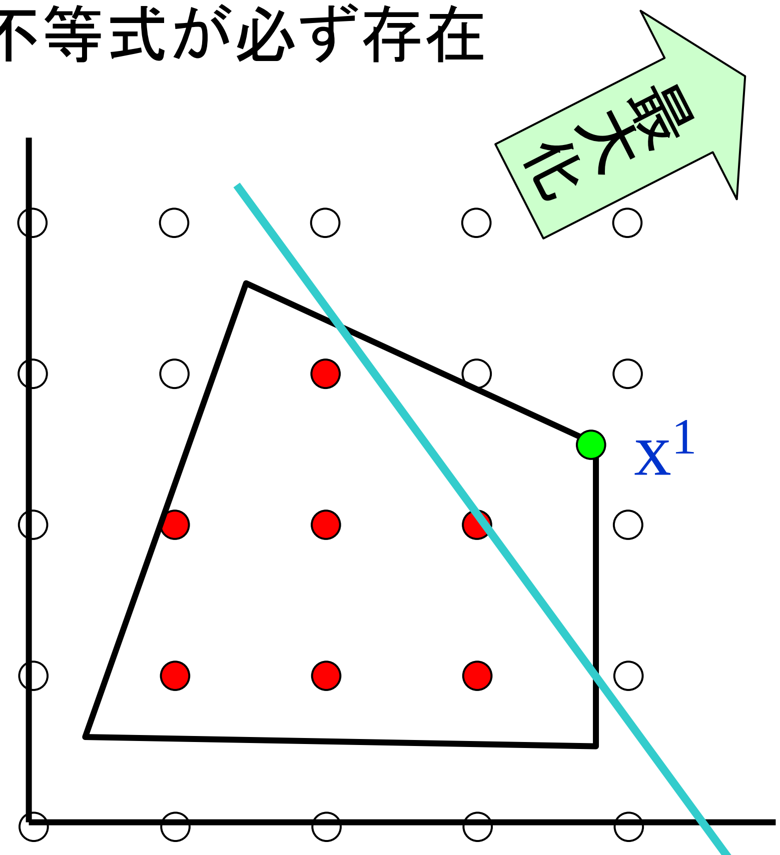
④ $x^t$をカットする妥当不等式 $\pi x \leqq \beta$ が見つかった

➔ 定式化に追加, ①へ戻る

$x^t$ をカットする妥当不等式$\pi x \leq \beta$

$\Longleftrightarrow$ 任意の整数解$x$に対して $\pi x \leq \beta$

$x^t$ に対して $\pi x^t > \beta$



# 切除平面法の流れ

① 現在の定式化に対してLP緩和を解く➔緩和解 $x^t$（$t$ =反復回数）

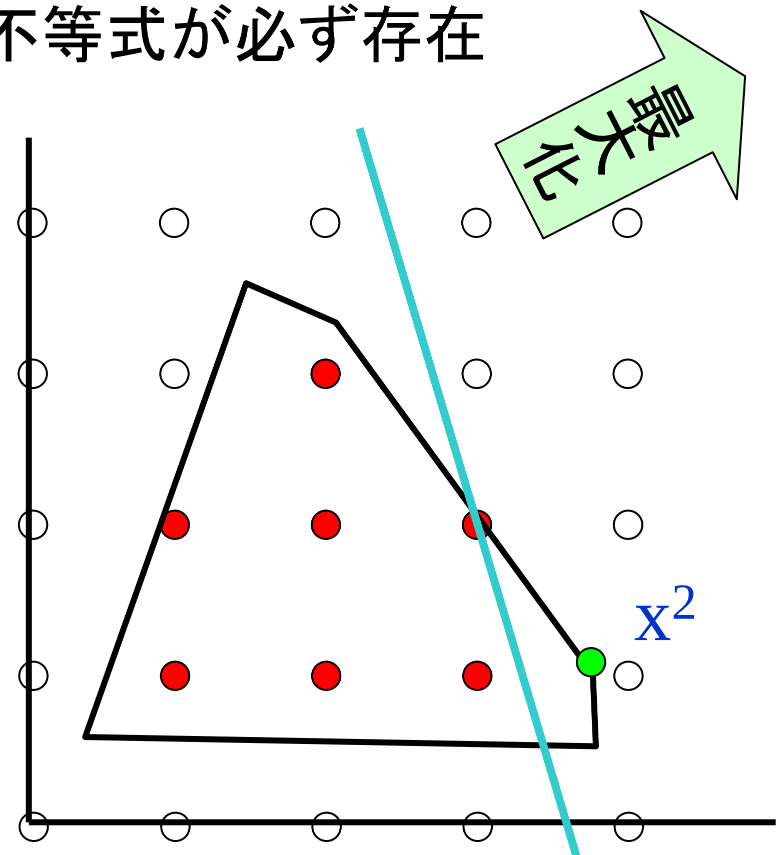
② $x^t$ が整数解➔元のIPの最適解（終了）

③ $x^t$ が非整数解➔$x^t$ をカットする妥当不等式が必ず存在

④ $x^t$をカットする妥当不等式 $\pi x \leqq \beta$ が見つかった

➔ 定式化に追加，①へ戻る

⑤ $x^t$をカットする妥当不等式が見つからない➔終了



# 切除平面法の流れ

① 現在の定式化に対してLP緩和を解く➔緩和解 $x^t$ ($t$ =反復回数)

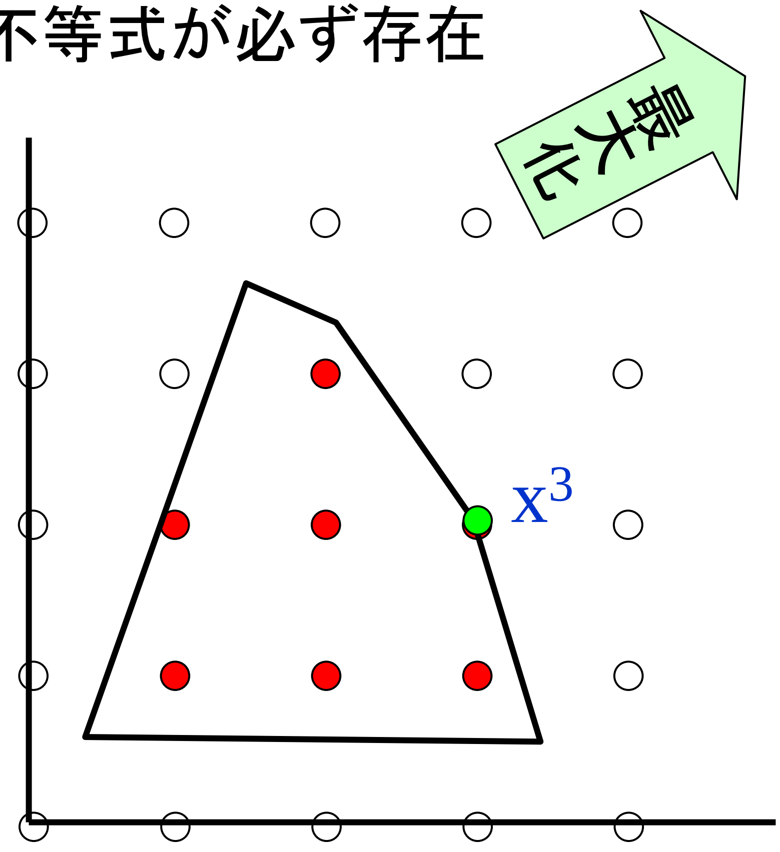
② $x^t$ が整数解➔元のIPの最適解(終了)

③ $x^t$ が非整数解➔$x^t$ をカットする妥当不等式が必ず存在

④ $x^t$をカットする妥当不等式 $\pi x \leqq \beta$ が見つかった

➔ 定式化に追加, ①へ戻る

⑤ $x^t$をカットする妥当不等式が見つからない➔終了



# Gomoryの小数切除平面法
(fractional cutting plane algorithm)

- Chvátal-Gomory procedure を組み込んだ切除平面法
- LP緩和の最適基底解を利用

以下では次の例を使ってアルゴリズムを説明

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 5x_1 - x_2 \\
\text{条件} & 7x_1 - 2x_2 \leq 14 \\
 & 2x_2 \leq 3 \\
 & 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0, \text{整数}
\end{array}
$$

# 等式制約の問題への変形

- まず、スラック変数を使って等式条件の問題に変形

最大化 $5x_1 - x_2$

条件 $7x_1 - 2x_2 \le 14$

$2x_2 \le 3$

$2x_1 - 2x_2 \le 3$

$x_1, x_2 \ge 0$, 整数

スラック変数 $x_3, x_4, x_5$ を使う

最大化 $5x_1 - x_2$

条件 $7x_1 - 2x_2 + x_3 = 14$

$2x_2 + x_4 = 3$

$2x_1 - 2x_2 + x_5 = 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$, 整数

# LP緩和解の計算

- LP緩和の最適基底解を計算

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 5x_1 - x_2 \\
\text{条件} & 7x_1 - 2x_2 + x_3 = 14 \\
& 2x_2 + x_4 = 3 \\
& 2x_1 - 2x_2 + x_5 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

最適基底解 $\left(\frac{20}{7}, 3, 0, 0, \frac{23}{7}\right)$

基底解: n – m 個の変数を0とおいて得られる解

（辞書により表現できる解）

（n: 変数の数、m: 等式制約の数）

最適な基底解が必ず存在する

# 最適辞書の計算

- 最適基底解に対応する定式化(辞書)を計算

最大化 $5x_1 - x_2$

条件
$$
\begin{aligned}
7x_1 - 2x_2 + x_3 &= 14\\
2x_2 + x_4 &= 3\\
2x_1 - 2x_2 + x_5 &= 3\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

最適基底解 $(\frac{20}{7}, 3, 0, 0, \frac{23}{7})$

最大化 $\frac{59}{7} - \frac{4}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4$

条件
$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{20}{7} - \frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4\\
x_2 &= 3 - x_4\\
x_5 &= \frac{23}{7} + \frac{2}{7}x_3 - \frac{10}{7}x_4
\end{aligned}
$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

基底解の値に等しい

基底解：n − m 個の変数を0とおいて得られる解

目的関数および制約の右辺に現れる変数

# 妥当不等式の生成

- 最適基底解が非整数解

  ➔GC procedure により妥当不等式を作る

最適基底解 $(\frac{20}{7}, 3, 0, 0, \frac{23}{7})$

$x_1$ は非整数➔第1制約を使って妥当不等式を作る

$$
\begin{array}{lrlll}
\text{最大化} & & \frac{59}{7} & -\frac{4}{7}x_3 & -\frac{1}{7}x_4 \\
\text{条件} & x_1 = & \frac{20}{7} & -\frac{1}{7}x_3 & -\frac{2}{7}x_4 \\
 & x_2 = & 3 & & -x_4 \\
 & x_5 = & \frac{23}{7} & +\frac{2}{7}x_3 & -\frac{10}{7}x_4 \\
 & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0}
\end{array}
$$

# 妥当不等式の生成

- 最適基底解が非整数解
  - ➔GC procedure により妥当不等式を作る

最適基底解 $(\frac{20}{7}, 3, 0, 0, \frac{23}{7})$

LP緩和解をカットする妥当不等式

$$x_1 + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 = \frac{20}{7}$$

GC proc. を使用

$$x_1 + \left\lfloor \frac{1}{7} \right\rfloor x_3 + \left\lfloor \frac{2}{7} \right\rfloor x_4 \leq \left\lfloor \frac{20}{7} \right\rfloor$$

$x_1$消去

$$\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 \geq \frac{6}{7}$$

等式へ

$$x_6 = -\frac{6}{7} + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4$$

# 新たな定式化

- 求めた妥当不等式を追加
- LP緩和の最適基底解を求める
- 最適基底解に対応する辞書をつくる

$$
\begin{array}{llllll}
\text{最大化} & & \frac{59}{7} & -\frac{4}{7}x_3 & -\frac{1}{7}x_4 \\
\text{条件} & x_1 = & \frac{20}{7} & -\frac{1}{7}x_3 & -\frac{2}{7}x_4 \\
& x_2 = & 3 & & -x_4 \\
& x_5 = & \frac{23}{7} & +\frac{2}{7}x_3 & -\frac{10}{7}x_4 \\
& x_6 = & -\frac{6}{7} & +\frac{1}{7}x_3 & +\frac{2}{7}x_4 \\
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0, \text{整数}$$

$$
\begin{array}{llllll}
\text{最大化} & & \frac{15}{2} & -\frac{1}{2}x_5 & -3x_6 \\
\text{条件} & x_1 = & 2 & & -x_6 \\
& x_2 = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_5 & -x_6 \\
& x_3 = & 1 & +x_5 & +5x_6 \\
& x_4 = & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}x_5 & -6x_6 \\
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

最適基底解 $(2, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 0, 0)$

# 妥当不等式の生成

- 最適基底解が非整数解

  ➔GC procedure により妥当不等式を作る

最適基底解 $(2, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 0, 0)$

$$
\begin{array}{lrlllll}
\text{最大化} & & & \frac{15}{2} & -\frac{1}{2}x_5 & -3x_6 \\
\text{条件} & x_1 & = & 2 & & -x_6 \\
 & x_2 & = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_5 & -x_6 \\
 & x_3 & = & 1 & +x_5 & +5x_6 \\
 & x_4 & = & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}x_5 & -6x_6 \\
 & \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

$x_2$ は非整数➔第2制約を使って妥当不等式を作る

$$x_2 - \frac{1}{2}x_5 + x_6 = \frac{1}{2}$$

GC proc. を使用 ➔

$$x_2 - x_5 + x_6 \leq 0$$

$x_2$消去 ➔

$$\frac{1}{2}x_5 \geq \frac{1}{2}$$

等式へ ➔

$$x_7 = \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}$$

# 新たな定式化

- 求めた妥当不等式を追加
- LP緩和の最適基底解を求める

$$
\begin{array}{llllll}
\text{最大化} & & & \frac{15}{2} & -\frac{1}{2}x_5 & -3x_6 \\
\text{条件} & x_1 & = & 2 & & -x_6 \\
& x_2 & = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_5 & -x_6 \\
& x_3 & = & 1 & +x_5 & +5x_6 \\
& x_4 & = & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}x_5 & -6x_6 \\
& x_7 & = & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_5 & \\
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0, \text{整数}$$

最適基底解 $(2, 1, 2, 2, 1, 0, 0)$

整数解➔元のIPの最適解