情報システム評価学
―整数計画法―

第10回目：切除平面法

塩浦昭義（東北大学 大学院情報科学研究科 准教授）

IPの解集合とその凸包

- 線形整数計画問題

  最大化 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

  条件： $x \in X \equiv \{x \in \mathbf{Z}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$

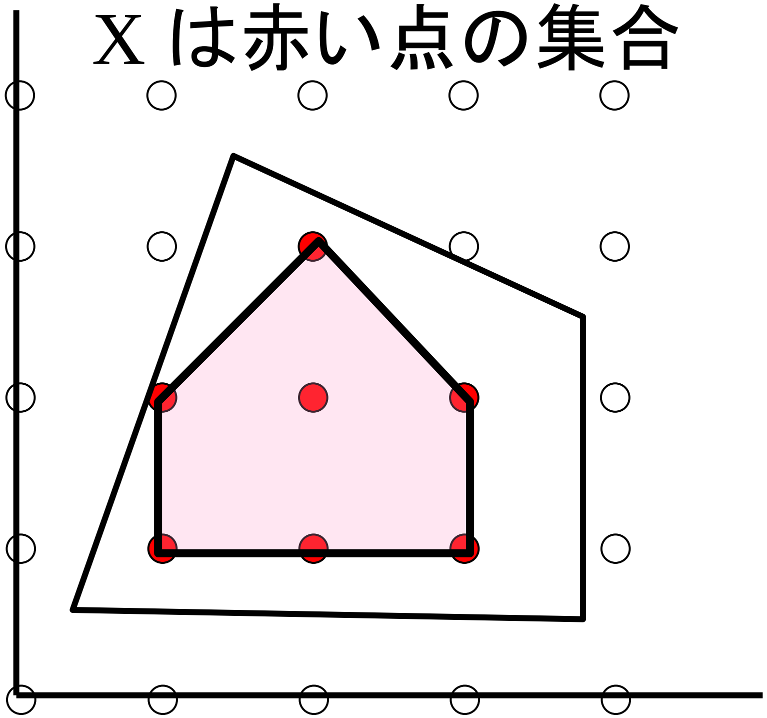
X の凸包 conv(X) を表現する
不等式系

$$\mathrm{conv}(X) \equiv \{x \in \mathbf{R}^n \mid \tilde{A}x \leq \tilde{b},\ x \geq 0\}$$

が事前にわかる

➔conv(X)上でLPの最適(端点）解
を求めると，それはIPの最適解

X は赤い点の集合



解集合の凸包の複雑さ

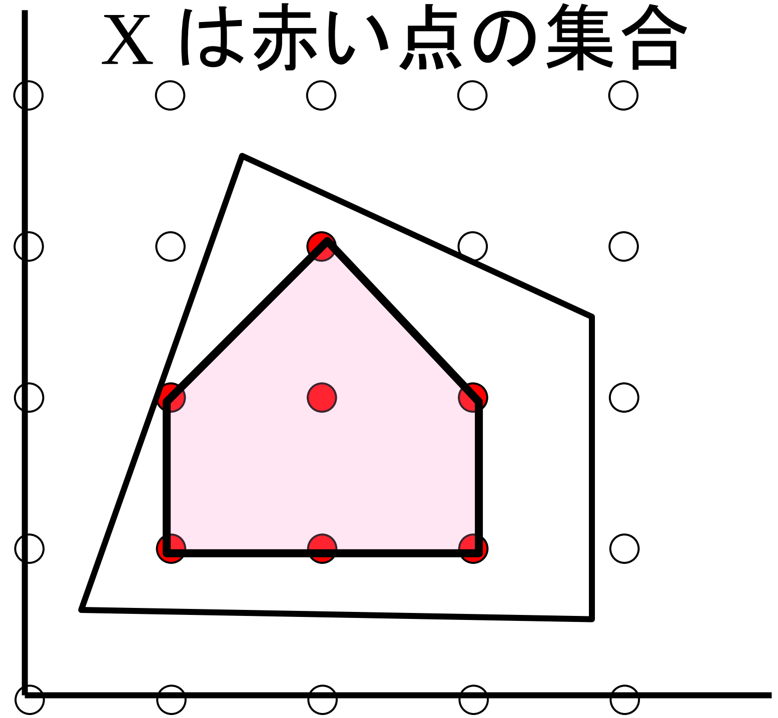
- 線形整数計画問題

最大化 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

条件： $x \in X \equiv \{x \in \mathbf{Z}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$

しかし,

- conv(X) の構造は複雑
- 指数個の不等式が必要なこともある
- 一般にconv(X)の不等式系表現を効率的に求めることは困難



妥当不等式の利用

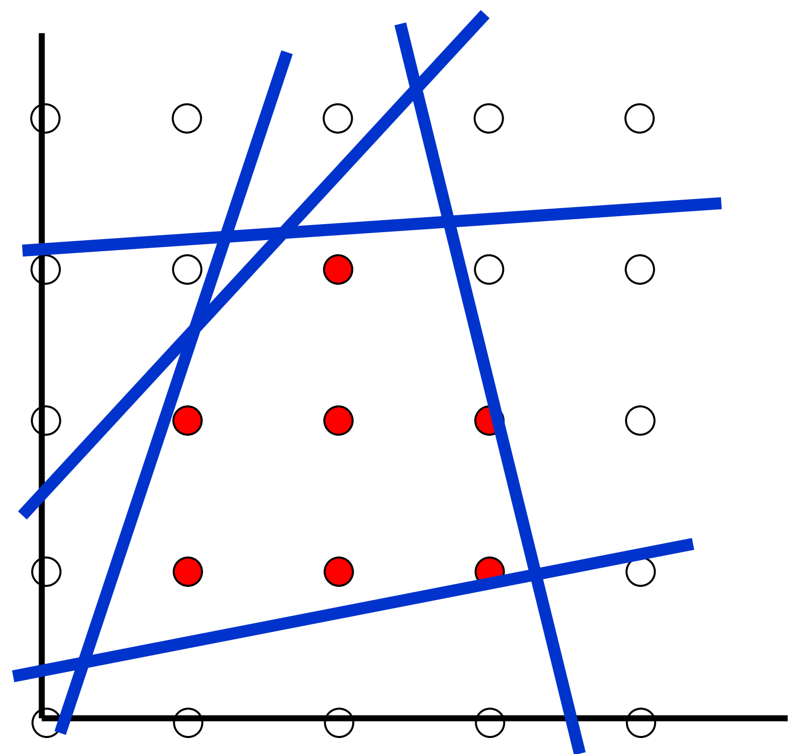
不等式 $ax \leq \beta$ はベクトル集合 $X \subseteq \mathbf{R}^n$ に対する**妥当不等式**

$\iff$ 全ての $x \in X$ に対して不等式 $ax \leq \beta$ が成り立つ

conv(X)の表現を求める代わりに,
解集合 X に対する妥当不等式を
繰り返し追加

➔ 得られる多面体は次第にconv(X)
近づく

➔LP最適解が次第にIP最適解に
近づく.
運が良ければIP最適解が得られる



「良い」妥当不等式とは？
妥当不等式の使い方は？

妥当不等式の簡単な例1

- 0-1変数の整数計画問題

$$X = \{x \in \{0,1\}^5 \mid 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \le -2\}$$

$$x_2 = x_4 = 0$$
$$\Longrightarrow 3x_1 + 2x_3 + x_5 \le -2 \text{ (矛盾)}$$
$\therefore$ $x_2 + x_4 \ge 1$ が成り立つ（妥当不等式）

$$x_1 = 1, x_2 = 0$$
$$\Longrightarrow 3 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \ge 3 - 3 = 0 > -2 \text{ (矛盾)}$$
$\therefore$ $x_1 \le x_2$ が成り立つ（妥当不等式）

妥当不等式の簡単な例2

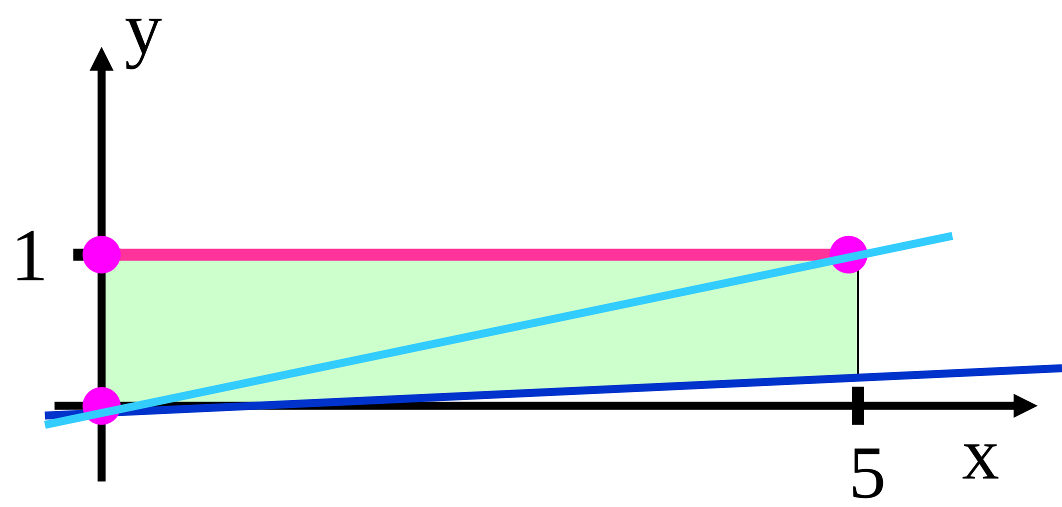
- 0-1変数＋実数変数の混合整数計画問題

$$X = \{(x,y) \mid x \le 9999y,\ 0 \le x \le 5,\ x \in \mathbf{R},\ y \in \{0,1\}\}$$

容量付き施設配置問題などに
良く出てくる形の制約

$$X = \{(0,0)\} \cup \{(x,1) \mid 0 \le x \le 5\}$$

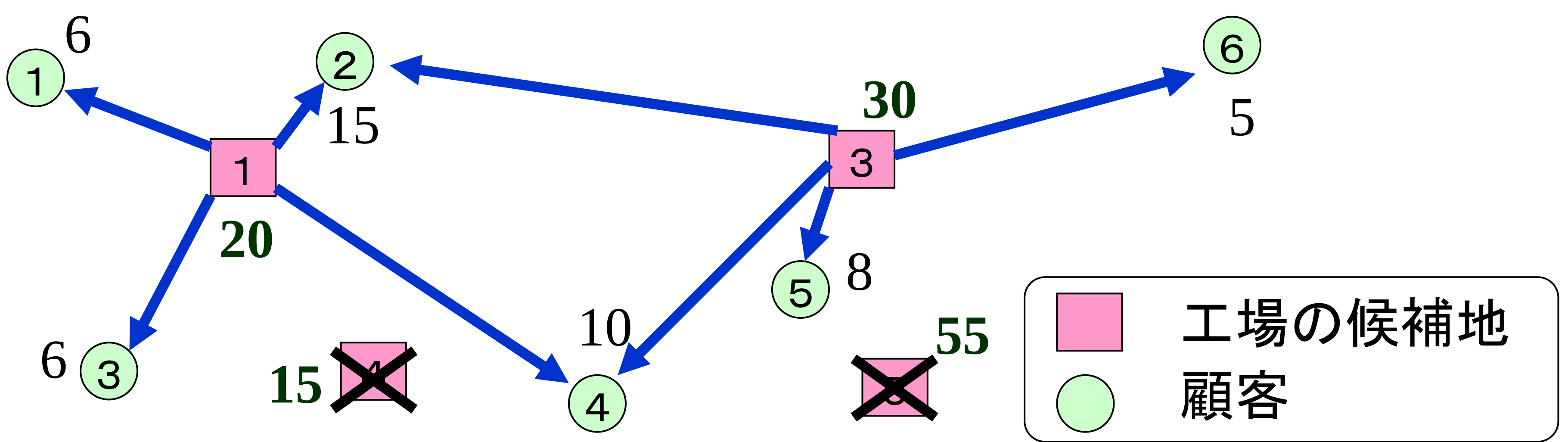
$\Longrightarrow$ $x \le 5y$ は妥当不等式



この妥当不等式を加えると，
X の凸包の不等式表現が
得られる

容量付き施設配置問題

- 工場の候補地 N={1, 2, …, n}, 顧客 M={1, 2, …, m}
- 工場の幾つかを設置（工場 j の設置コスト f_j）
- 工場 j で生産可能な製品の量≦ b_j
- 顧客 i ∈M の製品の需要量 = a_i を満たすように設置工場から製品を輸送する
- 工場 j から顧客 i への製品1単位の輸送コスト g_{ij}
- 目的：工場の設置コスト＋製品の輸送コストの最小化



容量付き施設配置問題の定式化

工場の設置コスト　　製品の輸送コスト

最小化 $\boxed{\sum_{j\in N} f_j y_j} + \boxed{\sum_{i\in M}\sum_{j\in N} g_{ij} x_{ij}}$

条件 $\sum_{i\in M} x_{ij} \le b_j y_j \ (j \in N)$

— 工場 j が設置されたとき，顧客に供給できる製品量は b_j 以下

$\sum_{j\in N} x_{ij} = a_i \ (i \in M)$

— 顧客 i へ供給する製品量はちょうど a_i

$x_{ij} \ge 0 \ (i \in M, j \in N)$ 工場 j から顧客 i への輸送量

$y_j \in \{0, 1\} \ (j \in N)$ 工場 j をつくるとき 1，そうでないとき 0

容量付き施設配置問題の妥当不等式

条件

$$\sum_{i \in M} x_{ij} \leq b_j y_j \ (j \in N)$$
$$\sum_{j \in N} x_{ij} = a_i \ (i \in M)$$
$$x_{ij} \geq 0 \ (i \in M, j \in N)$$
$$y_j \in \{0, 1\} \ (j \in N)$$

変数 x_{ij} は $x_{ij} \leq b_j y_j$ を満たす

$a_i \leq b_j$ の場合,
$x_{ij} \leq b_j y_j$, $x_{ij} \leq a_i$, $y_j \in \{0, 1\}$ より
妥当不等式 $x_{ij} \leq a_i y_j$ が得られる

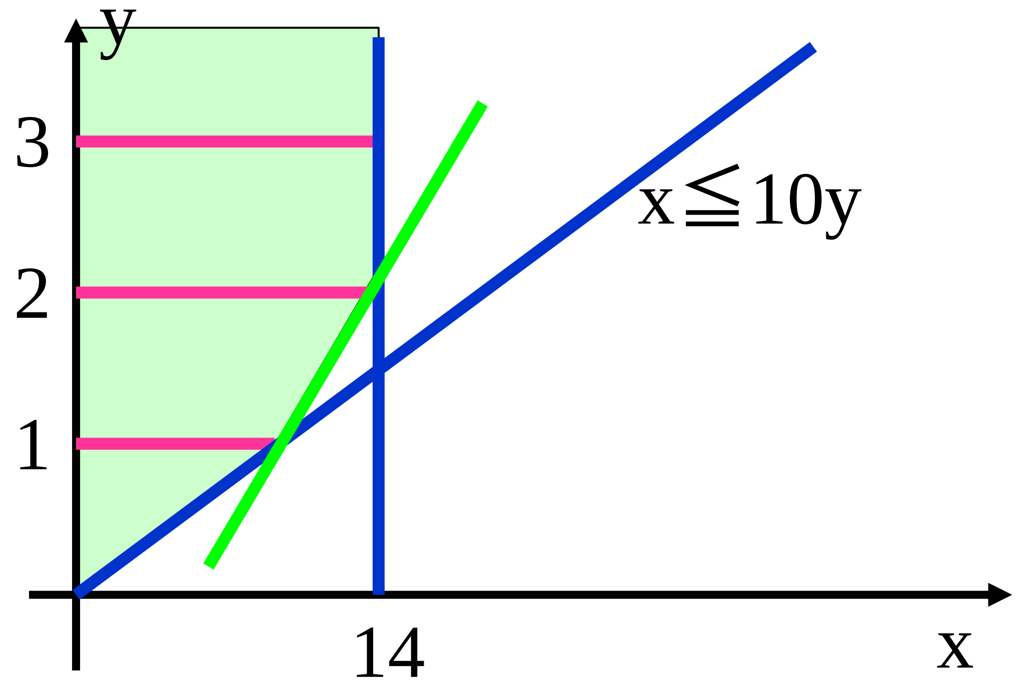
妥当不等式の簡単な例3

- 整数変数＋実数変数の混合整数計画問題

$$X = \{(x,y) \mid x \le 10y,\ 0 \le x \le 14,\ x \in \mathbf{R},\ y: \text{非負整数}\}$$

$$\Longrightarrow x \le 6 + 4y \ (\iff x \le 14 - 4(2-y)) \ \text{は妥当不等式}$$

妥当不等式の追加により，凸包が記述できた

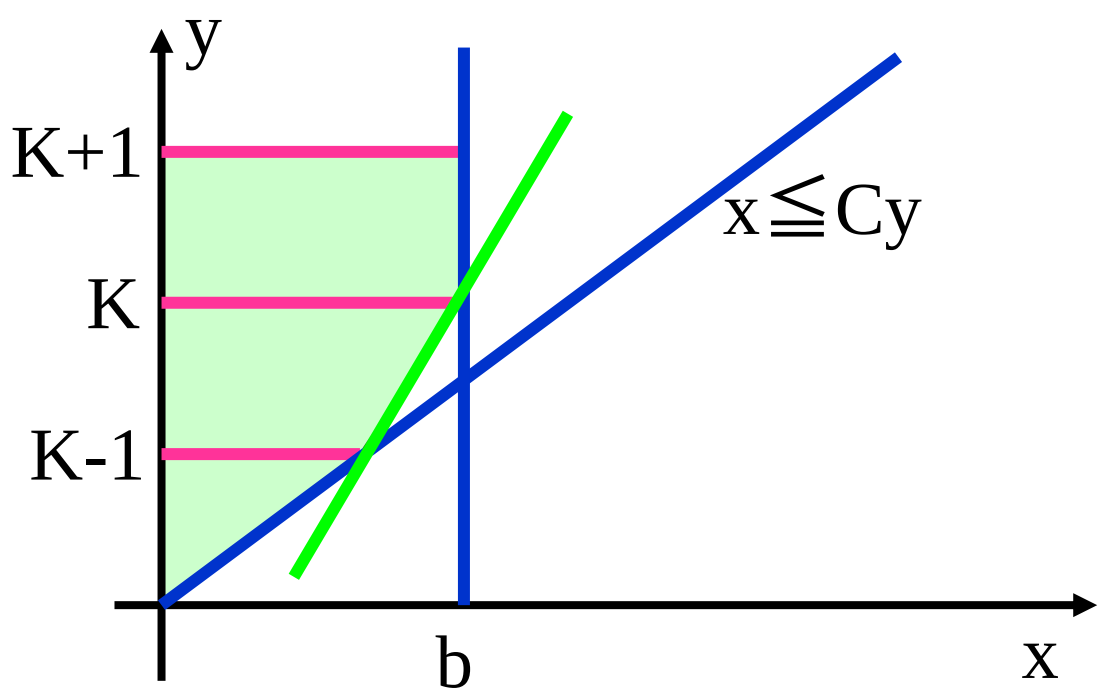


妥当不等式の簡単な例3

一般の場合

$$X = \{(x,y) \mid x \le Cy,\ 0 \le x \le b,\ x \in \mathbf{R},\ y: \text{非負整数}\}$$
$$\Longrightarrow x \le b - \gamma(K - y)\ \left(K = \left\lceil \frac{b}{C} \right\rceil,\ \gamma = b - (K-1)C\right)$$

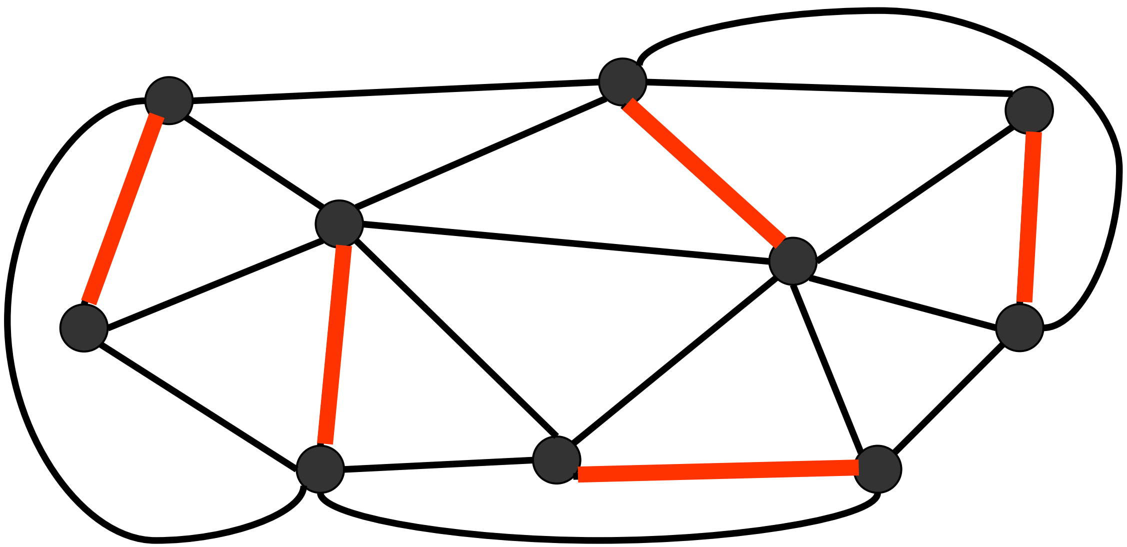
は妥当不等式



妥当不等式の簡単な例4

- 組合せ最適化問題
  - 無向グラフのマッチング

  ⇔各頂点に接する枝が高々一本である枝集合

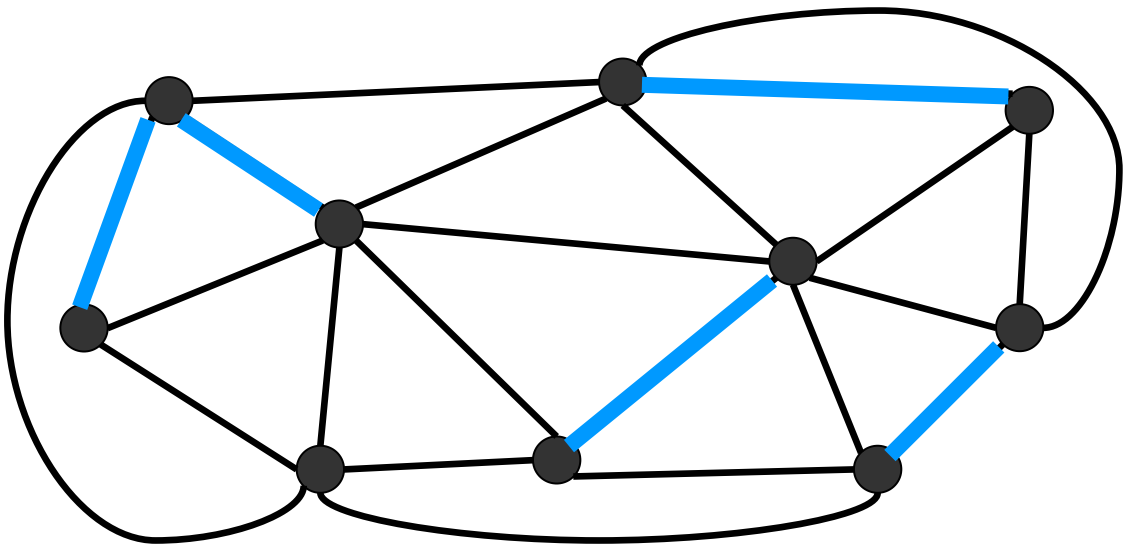


赤い枝集合は
マッチング

妥当不等式の簡単な例4

- 組合せ最適化問題
  - 無向グラフのマッチング

    ←→各頂点に接する枝が高々一本である枝集合



青い枝集合はマッチングではない

妥当不等式の簡単な例4

- 組合せ最適化問題
  - マッチングの集合の定式化

枝集合 $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ に対し，ベクトル $x = (x_{e_1}, \ldots, x_{e_m})$ を

$$x_e = \begin{cases} 1 & (e \text{ はマッチングに含まれる}) \\ 0 & (e \text{ はマッチングに含まれない}) \end{cases}$$ により定義

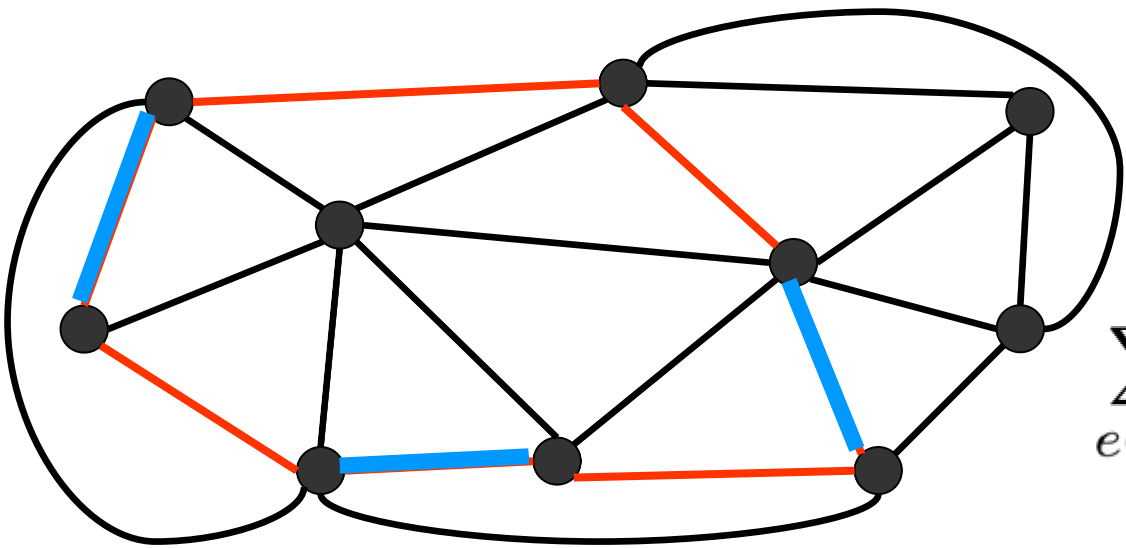
マッチングに対応する 0-1 ベクトル集合は次のように記述される：

$$\sum_{e \in \delta(u)} x_e \leq 1 \quad (u \in V) \qquad (\delta(u) \equiv \text{頂点 } u \text{ に接続する枝集合})$$

$$x_e \in \{0, 1\} \quad (e \in E)$$

妥当不等式の簡単な例4

- 組合せ最適化問題
  - マッチング集合の妥当不等式（奇閉路不等式）
    - 奇数の長さ 2k +1 の閉路 T⊆E
    - Tに含まれるマッチングの枝は高々 k 本



$$\sum_{e \in T} x_e \leq k$$

$(T$ は長さ $2k+1$ の閉路$)$

長さ7の閉路---マッチングの枝は高々3本

妥当不等式の簡単な例5

- 整数への丸めの利用その1

$$X = \{x \in \mathbf{Z}^4 \mid 13x_1 + 20x_2 + 11x_3 + 6x_4 \geq 72,\ \ x \geq 0\}$$

$$13x_1 + 20x_2 + 11x_3 + 6x_4 \geq 72$$

の両辺を11で割って切り上げを使うと

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq \frac{13}{11}x_1 + \frac{20}{11}x_2 + \frac{11}{11}x_3 + \frac{6}{11}x_4 \geq \frac{72}{11}$$

左辺は整数なので，72/11を切り上げて

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 7$$

妥当不等式の簡単な例5

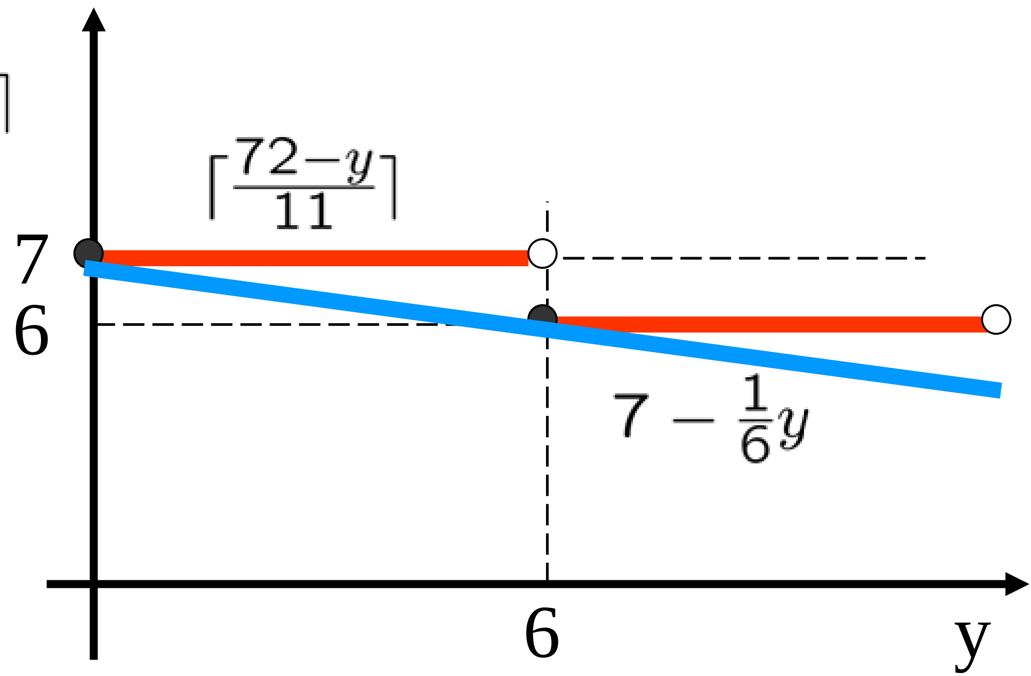
- 整数への丸めの利用その2

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^4 \times \mathbf{R} \mid$$
$$13x_1 + 20x_2 + 11x_3 + 6x_4 + y \geq 72, x, y \geq 0\}$$

$$13x_1 + 20x_2 + 11x_3 + 6x_4 \geq 72 - y$$

に対して同様の議論により,

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq \lceil \frac{72-y}{11} \rceil$$



$\lceil \frac{72-y}{11} \rceil \geq 7 - \frac{1}{6}y$ なので

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 7 - \frac{1}{6}y$$

線形計画問題に対する妥当不等式の作り方

- 整数計画問題に対する妥当不等式の作り方を理解するための準備

性質: 実数ベクトルの集合 $P = \{x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ に対して,
$\pi^T x \leq \beta$ は妥当不等式
$\iff$ ある非負実数ベクトル u に対して,
$A^T u \geq \pi,\ b^T u \leq \beta$ が成立

証明： $\pi^T x \leq \beta$ は妥当不等式

$\iff$ $\max\{\pi^T x \mid x \in P\} \leq \beta$

$\iff$ LP の双対定理により, $\min\{b^T u \mid A^T u \geq \pi, u \geq 0\} \leq \beta$

$\iff$ ある $u \geq 0$ に対して $b^T u \leq \beta$

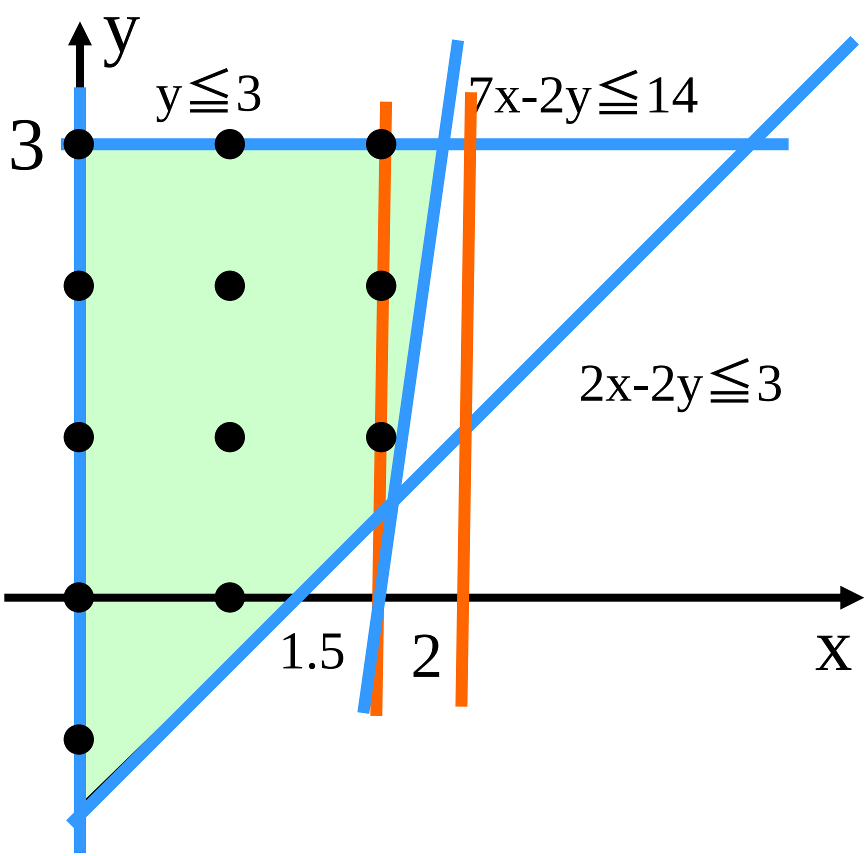
整数計画問題に対する妥当不等式の作り方

$\{x \mid Ax \leq b,\ \ x : \text{非負整数ベクトル}\}$ に対する妥当不等式をどうやって作るか?

基本となる性質:

$$\{x \in \mathbf{Z} \mid x \leq b\} \text{ に対して } x \leq \lfloor b \rfloor \text{ は妥当不等式}$$

整数計画問題に対する妥当不等式の導出例



$$(7x - 2y \leq 14) \times \frac{2}{7} + (y \leq 3) \times \frac{37}{63}$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{1}{63}y \leq \frac{121}{21}$$

$$\Rightarrow 2x + \lfloor \frac{1}{63} \rfloor y \leq \frac{121}{21}$$

$$\Rightarrow 2x \leq \lfloor \frac{121}{21} \rfloor = 5$$

両辺に1/2をかける$\Rightarrow x \leq 2.5$

$$\Rightarrow x \leq \lfloor 2.5 \rfloor = 2$$

xに関してタイトな妥当不等式が得られた

整数計画問題に対する妥当不等式の導出：Chvátal-Gomory procedure

- ChvátalとGomoryによって提案された，整数計画問題の妥当不等式を得るための一般的な手法
- この procedure は単純だが，とても有用

定理：任意の妥当不等式は，Chvátal-Gomory procedure を有限回適用することによって生成可能

証明は省略