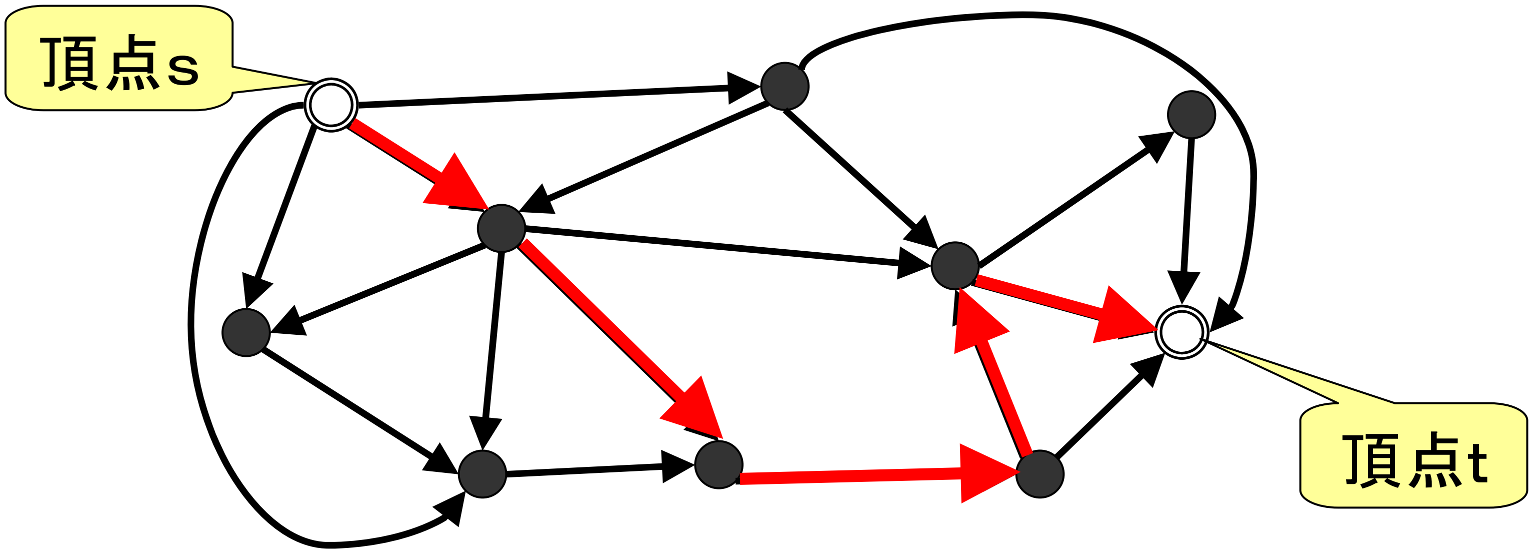
情報システム評価学
―整数計画法―

第4回目：動的計画法

塩浦昭義（東北大学 大学院情報科学研究科 准教授）

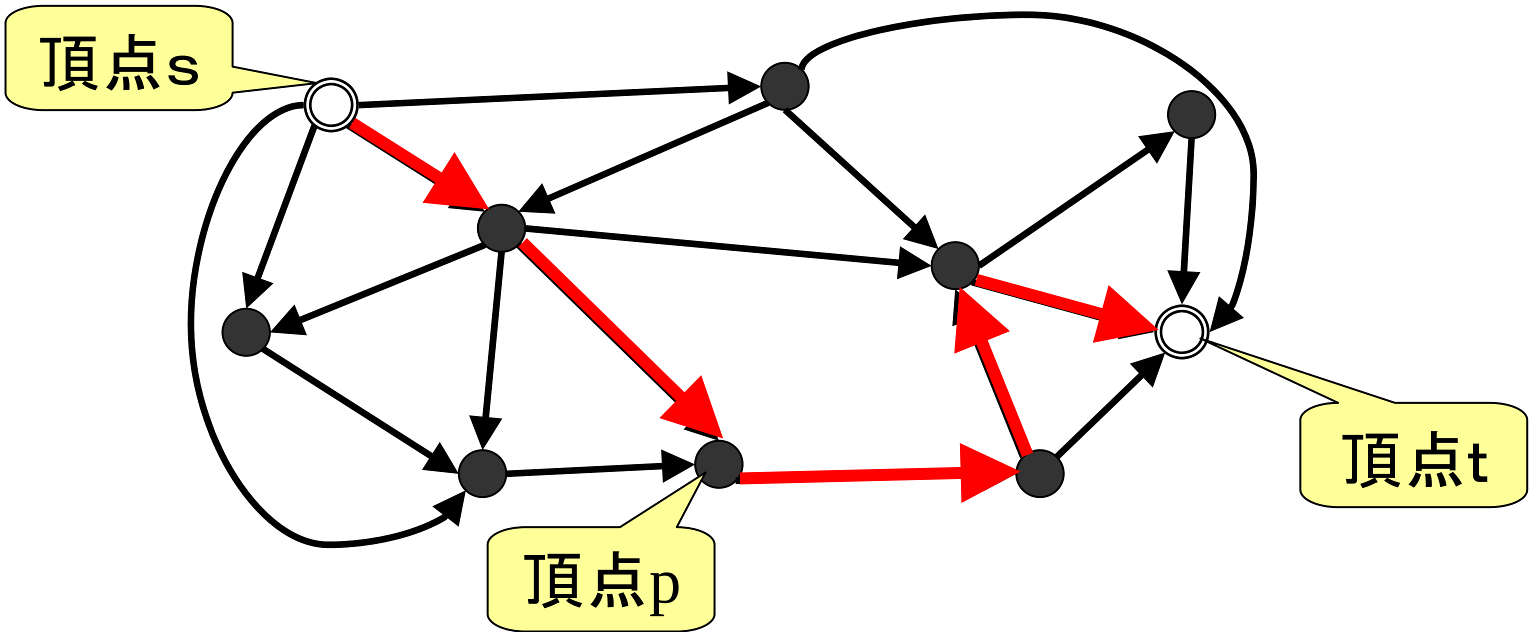
有向無閉路グラフでの最短路問題

- 入力：有向無閉路(acyclic) グラフ G = (V, A),
  ２頂点 s, t∈V, 各枝 (i, j) の長さ c_{ij}
- 出力：s から t への長さ最短の有向パス



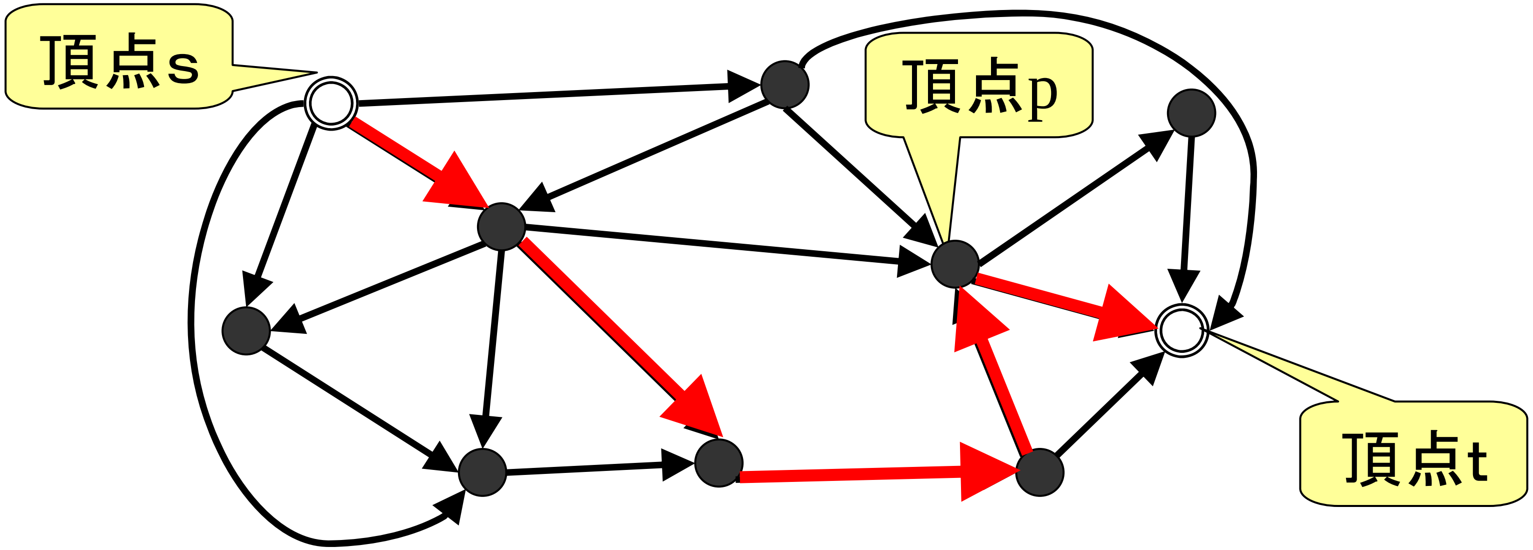
最短路の性質

- s から t への最短パスが頂点 p を通る
  ➔ s から p への部分パスは s から p への最短路
  p から t への部分パスは p から t への最短路



最短路の性質

- 特に, s から t への最短パスにおいて,
  t の直前の頂点が p
  ➔ s から p への部分パスは s から p への最短路
  ➔ s から t への最短路長＝(sからpへの最短路長)+c_{pt}

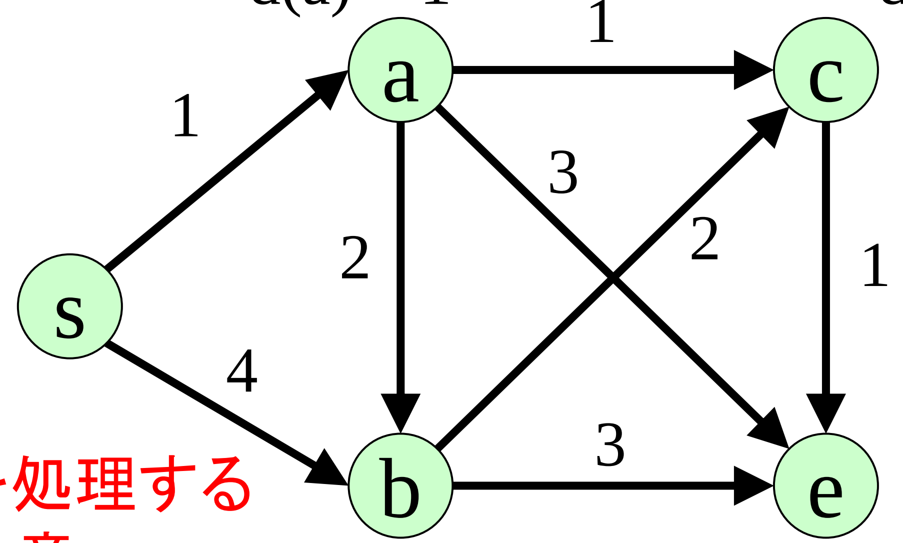


最短路長の計算

- 定義--- d(v): 頂点 s から v までの最短路長

全頂点 v に対して d(v) は次の再帰式により計算可能

$$d(v) = \min\{d(u) + c_{uv} \mid (u, v)\text{は v に入る枝}\}$$



$d(e) = \min\{d(a)+3, d(b)+3, d(c)+1\} = 3$

※頂点を処理する順番に注意

最短路計算のポイント

- 最短路の性質➔再帰式による解法

「最適性の原理」
最適解の部分解は，元の問題の部分問題の最適解である

⇩

再帰的なアルゴリズム

このアプローチ，もしくはこのアプローチにより得られる再帰的アルゴリズムを**動的計画法**という

0-1ナップサック問題と部分問題

- 0-1ナップサック問題（入力は全て正の整数）

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\text{条件} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \\
&\qquad\quad x_j \in \{0,1\} \ (j = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

元の問題の最適値

$f_n(b)$

- 部分問題（r = 1, 2,…, n, λ = 0, 1, …, b）

$$
\begin{aligned}
(P_r(\lambda)) \quad &\text{最大化} \quad \sum_{j=1}^{r} c_j x_j \\
&\text{条件} \quad \sum_{j=1}^{r} a_j x_j \le \lambda \\
&\qquad\quad x_j \in \{0,1\} \ (j = 1, 2, \ldots, r)
\end{aligned}
$$

この部分問題の最適値

$f_r(\lambda)$

0-1ナップサック問題の最適解の性質

- 部分問題(r = 1, 2,…, n,　λ = 0, 1, …, b)

$$(P_r(\lambda)) \quad \text{最大化} \quad \sum_{j=1}^{r} c_j x_j$$
$$\text{条件} \quad \sum_{j=1}^{r} a_j x_j \leq \lambda$$
$$x_j \in \{0,1\} \ (j = 1, 2, \ldots, r)$$

この部分問題の最適値

$f_r(\lambda)$

- $P_r(\lambda)$の最適解 x* において $x^*_r = 0$ ならば $(x^*_1, \ldots, x^*_{r-1})$は$P_{r-1}(\lambda)$の最適解

$$f_r(\lambda) = f_{r-1}(\lambda)$$

- $P_r(\lambda)$の最適解 x* において $x^*_r = 1$ ならば $(x^*_1, \ldots, x^*_{r-1})$は$P_{r-1}(\lambda - a_r)$の最適解

$$f_r(\lambda) = f_{r-1}(\lambda - a_r) + c_r$$

0-1ナップサック問題に関する再帰式

$$x_r^* = 0 \Longrightarrow f_r(\lambda) = f_{r-1}(\lambda)$$

$$x_r^* = 1 \Longrightarrow f_r(\lambda) = f_{r-1}(\lambda - a_r) + c_r$$

$$\boxed{f_r(\lambda) = \max\{f_{r-1}(\lambda), f_{r-1}(\lambda - a_r) + c_r\}}$$

ただし $f_1(\lambda) = \begin{cases} 0 & (0 \leq \lambda < a_1) \\ c_1 & (a_1 \leq \lambda \leq b) \end{cases}$

上記の再帰式をつかって，

$f_2(0), f_2(1), \ldots, f_2(b),\ f_3(0), f_3(1), \ldots, f_3(b),$

$\ldots,\ f_n(0), f_n(1), \ldots, f_n(b)$

を順に計算 $\Longrightarrow$ 元問題の最適値が得られる

計算時間
O(nb)

0-1ナップサック問題の最適解の計算

- 最適解も再帰的に計算可能

$$f_r(\lambda) = \max\{f_{r-1}(\lambda), f_{r-1}(\lambda - a_r) + c_r\}$$

ここで

$$x_r^* = 0 \iff f_r(\lambda) = f_{r-1}(\lambda)$$
$$x_r^* = 1 \iff f_r(\lambda) = f_{r-1}(\lambda - a_r) + c_r$$

よって，

$f_r(\lambda) = f_{r-1}(\lambda)$
ならば $P_r(\lambda)$ の最適解は $(x_1^*, \ldots, x_{r-1}^*, 0)$
ここで $(x_1^*, \ldots, x_{r-1}^*)$ は $P_{r-1}(\lambda)$ の最適解

$f_r(\lambda) = f_{r-1}(\lambda - a_r) + c_r$
ならば $P_r(\lambda)$ の最適解は $(x_1^*, \ldots, x_{r-1}^*, 1)$
ここで $(x_1^*, \ldots, x_{r-1}^*)$ は $P_{r-1}(\lambda - a_r)$ の最適解

0-1ナップサック問題の問題例

最大化　$10x_1 + 7x_2 + 25x_3 + 24x_4$

条件　$2x_1 + x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 7$

$x_j \in \{0, 1\} \ (j = 1, 2, 3, 4)$

λ	0	1	2	3	4	5	6	7
f_1	0	0	10	10	10	10	10	10
f_2								
f_3								
f_4								

整数ナップサック問題と部分問題

- 整数ナップサック問題（入力は全て正の整数）

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\text{条件} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \\
&\qquad\quad x_j\text{:非負整数}\,(j = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

元の問題の最適値

$f_n(b)$

- 部分問題（r = 1, 2,…, n, λ = 0, 1, …, b）

$$
\begin{aligned}
(P_r(\lambda)) \quad &\text{最大化} \quad \sum_{j=1}^{r} c_j x_j \\
&\text{条件} \quad \sum_{j=1}^{r} a_j x_j \le \lambda \\
&\qquad\quad x_j\text{: 非負整数}\ (j = 1, 2, \ldots, r)
\end{aligned}
$$

この部分問題の最適値

$f_r(\lambda)$

整数ナップサック問題の最適解の性質

- 部分問題 (r = 1, 2,…, n,　λ = 0, 1, …, b)

$$(P_r(\lambda))\quad \text{最大化}\quad \sum_{j=1}^{r} c_j x_j$$

$$\text{条件}\quad \sum_{j=1}^{r} a_j x_j \le \lambda$$

$$x_j:\ \text{非負整数}\ (j = 1, 2, \ldots, r)$$

この部分問題の最適値

$f_r(\lambda)$

- $P_r(\lambda)$の最適解 x^* において $x^*_r = t$ ならば
  $(x^*_1, \ldots, x^*_{r-1})$は$P_{r-1}(\lambda - t\,a_r)$の最適解

$$\boxed{f_r(\lambda) = f_{r-1}(\lambda - ta_r) + tc_r}$$

整数ナップサック問題に関する再帰式

$$x_r^* = t \Longrightarrow f_r(\lambda) = f_{r-1}(\lambda - ta_r) + tc_r$$

$$\boxed{f_r(\lambda) = \max\{f_{r-1}(\lambda - ta_r) + tc_r \mid 0 \le t \le \lfloor \lambda / a_r \rfloor\}}$$

ただし $f_1(\lambda) = \lfloor \lambda / a_1 \rfloor$

上記の再帰式をつかって，

$f_2(0), f_2(1), \ldots, f_2(b),\ f_3(0), f_3(1), \ldots, f_3(b),$

$\ldots,\ f_n(0), f_n(1), \ldots, f_n(b)$

を順に計算 $\Longrightarrow$ 元問題の最適値が得られる

再帰式において $\lfloor \lambda / a_r \rfloor \le \lambda \le b$

➔計算時間 $O(nb^2)$

改善は
可能か？

整数ナップサック問題の最適解の性質その2

- 部分問題(r = 1, 2,…, n, λ = 0, 1, …, b)

$$(P_r(\lambda)) \quad \text{最大化} \quad \sum_{j=1}^{r} c_j x_j$$
$$\text{条件} \quad \sum_{j=1}^{r} a_j x_j \leq \lambda$$
$$x_j: \text{非負整数} \ (j = 1, 2, \ldots, r)$$

この部分問題の最適値

$f_r(\lambda)$

- $P_r(\lambda)$の最適解 x* において $x^*_r = 0$ ならば $(x^*_1, \ldots, x^*_{r-1})$は$P_{r-1}(\lambda)$の最適解

$$f_r(\lambda) = f_{r-1}(\lambda)$$

- $P_r(\lambda)$の最適解 x* において $x^*_r = 1+t \ (t \geqq 0)$ ならば $(x^*_1, \ldots, x^*_{r-1}, t)$は$P_r(\lambda - a_r)$の最適解

$$f_r(\lambda) = f_r(\lambda - a_r) + c_r$$

整数ナップサック問題に関する再帰式その２

$$x_r^* = 0 \Longrightarrow f_r(\lambda) = f_{r-1}(\lambda)$$

$$x_r^* = 1 + t \Longrightarrow f_r(\lambda) = f_r(\lambda - a_r) + c_r$$

$$f_r(\lambda) = \max\{f_{r-1}(\lambda), f_r(\lambda - a_r) + c_r\}$$

ただし $f_1(\lambda) = \lfloor \lambda / a_1 \rfloor$

上記の再帰式をつかって，

$f_2(0), f_2(1), \ldots, f_2(b),\ f_3(0), f_3(1), \ldots, f_3(b),$

$\ldots,\ f_n(0), f_n(1), \ldots, f_n(b)$

を順に計算 $\Longrightarrow$ 元問題の最適値が得られる

計算時間
O(nb)

整数ナップサック問題の問題例

最大化　$10x_1 + 7x_2 + 25x_3 + 24x_4$

条件　$2x_1 + x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 7$

x_j : 非負整数 $(j = 1, 2, 3, 4)$

λ	0	1	2	3	4	5	6	7
f_1	0	0	10	10	20	20	30	30
f_2								
f_3								
f_4								

整数ナップサック問題の最適解の性質その3

- 新たな部分問題(λ = 0, 1, …, b)

$$
\begin{aligned}
P_n(\lambda) \quad & \text{最大化} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
& \text{条件} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le \lambda \\
& x_j\text{: 非負整数 } (j = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

この部分問題の最適値

$h(\lambda)$

- $P_n(\lambda)$の最適解 x* において，ある j に対して
  $x^*_j = 1+t \ (t \geqq 0)$ ならば
  $(x^*_1, \ldots, x^*_{j-1}, t, x^*_{j+1}, \ldots, x^*_n)$ は $P_n(\lambda - a_j)$ の最適解

$$\boxed{h(\lambda) = h(\lambda - a_j) + c_j}$$

整数ナップサック問題に関する再帰式その２

$$x_j^* = 1 + t \ (\exists j) \Longrightarrow h(\lambda) = h(\lambda - a_j) + c_j$$

$$h(\lambda) = \max \left[0, \max_{j: a_j \leq \lambda} \left\{ h(\lambda - a_j) + c_j, \right\} \right]$$

ただし $h(0) = 0$

上記の再帰式をつかって$h(1), \ldots, h(b)$ を順に計算

$\Longrightarrow$ 元問題の最適値$h(b)$が得られる

計算時間 O(nb)

整数ナップサック問題の問題例

最大化　$10x_1 + 7x_2 + 25x_3 + 24x_4$

条件　$2x_1 + x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 7$

　　　x_j : 非負整数$(j = 1, 2, 3, 4)$

λ	0	1	2	3	4	5	6	7
h	0							

容量なしロットサイズ決定問題

- ロットサイズ決定問題
  - 各期における製品の製造数を決定する問題
  - 需要を満たしつつ，製造コスト，在庫の保管コストを最小に
- 入力
  - n: 期間数
  - f_t : 第t期における製造開始コスト
  - p_t : 第t期における製品1単位当りの製造コスト
  - h_t : 第t期における製品1単位当りの保管コスト
  - d_t : 第t期における製品の需要量

混合整数計画問題による定式化

- 変数
  - x_t : 第t期における製品の製造量
  - s_t : 第t期における製品の在庫量
  - $y_t \in \{0,1\}$: 第t期で製品を製造するとき1,そうでないとき0

最小化 $$\sum_{t=1}^{n} p_t x_t + \sum_{t=1}^{n} h_t s_t + \sum_{t=1}^{n} f_t y_t$$

条件 $$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t \ (t = 1, \ldots, n)$$

前期の在庫量＋今期の生産量＝今期の需要量＋今期の在庫量

$$x_t \leq M y_t \ (t = 1, \ldots, n)$$

生産を開始しないと製品を生産できない

$$s_0 = 0,\ s_t, x_t \geq 0,\ y_t \in \{0,1\} \ (t = 1, \ldots, n)$$

生産量と在庫量は非負

製品の流れ

最小化 $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} p_t x_t + \sum_{t=1}^{n} h_t s_t + \sum_{t=1}^{n} f_t y_t$

条件 $s_{t-1} + x_t = d_t + s_t \ (t = 1, \ldots, n)$

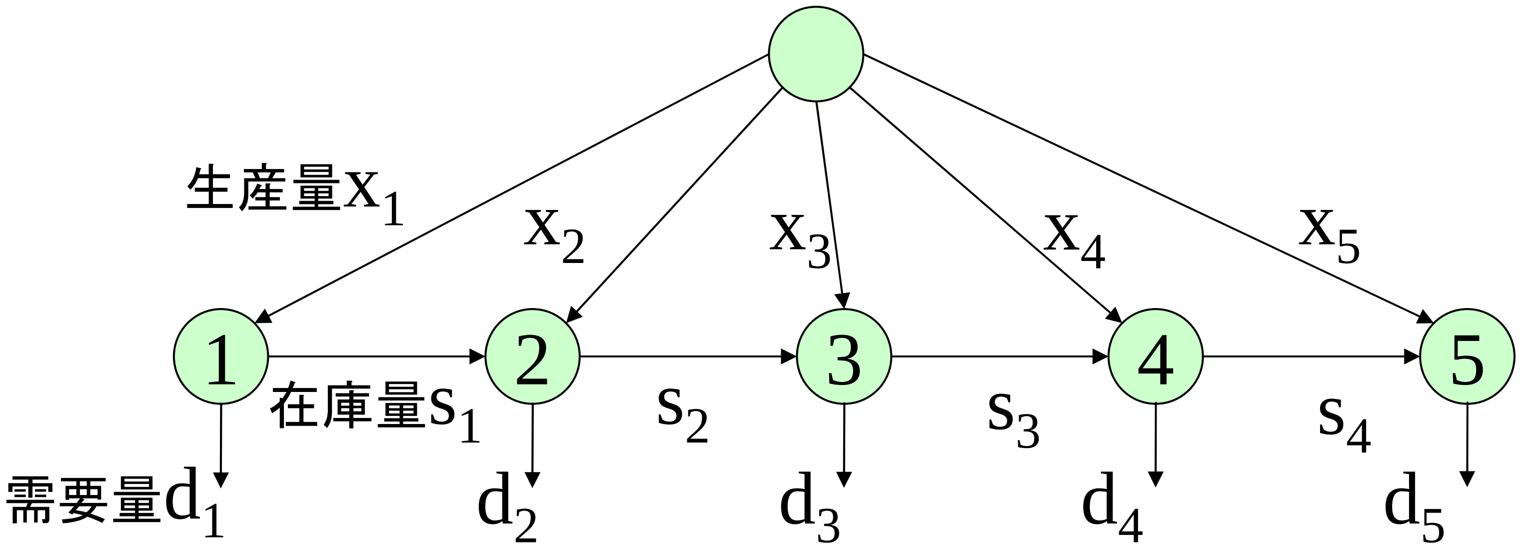
前期の在庫量＋今期の生産量＝今期の需要量＋今期の在庫量

$x_t \leq M y_t \ (t = 1, \ldots, n)$

生産を開始しないと製品を生産できない

$s_0 = 0, \ s_t, x_t \geq 0, \ y_t \in \{0, 1\} \ (t = 1, \ldots, n)$

生産量と在庫量は非負



部分問題

最小化 $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} p_t x_t + \sum_{t=1}^{n} h_t s_t + \sum_{t=1}^{n} f_t y_t$

条件 $s_{t-1} + x_t = d_t + s_t \ (t = 1, \ldots, n)$

前期の在庫量+今期の生産量=今期の需要量+今期の在庫量

$x_t \leq M y_t \ (t = 1, \ldots, n)$

生産を開始しないと製品を生産できない

$s_0 = 0,\ s_t, x_t \geq 0,\ y_t \in \{0, 1\} \ (t = 1, \ldots, n)$

生産量と在庫量は非負

第1期から第k期までに問題を制限

問題(P_k)

最小化 $\displaystyle\sum_{t=1}^{k} p_t x_t + \sum_{t=1}^{k} h_t s_t + \sum_{t=1}^{k} f_t y_t$

条件 $s_{t-1} + x_t = d_t + s_t \ (t = 1, \ldots, k)$

$x_t \leq M y_t \ (t = 1, \ldots, k)$

$s_0 = 0,\ s_t, x_t \geq 0,\ y_t \in \{0, 1\} \ (t = 1, \ldots, k)$

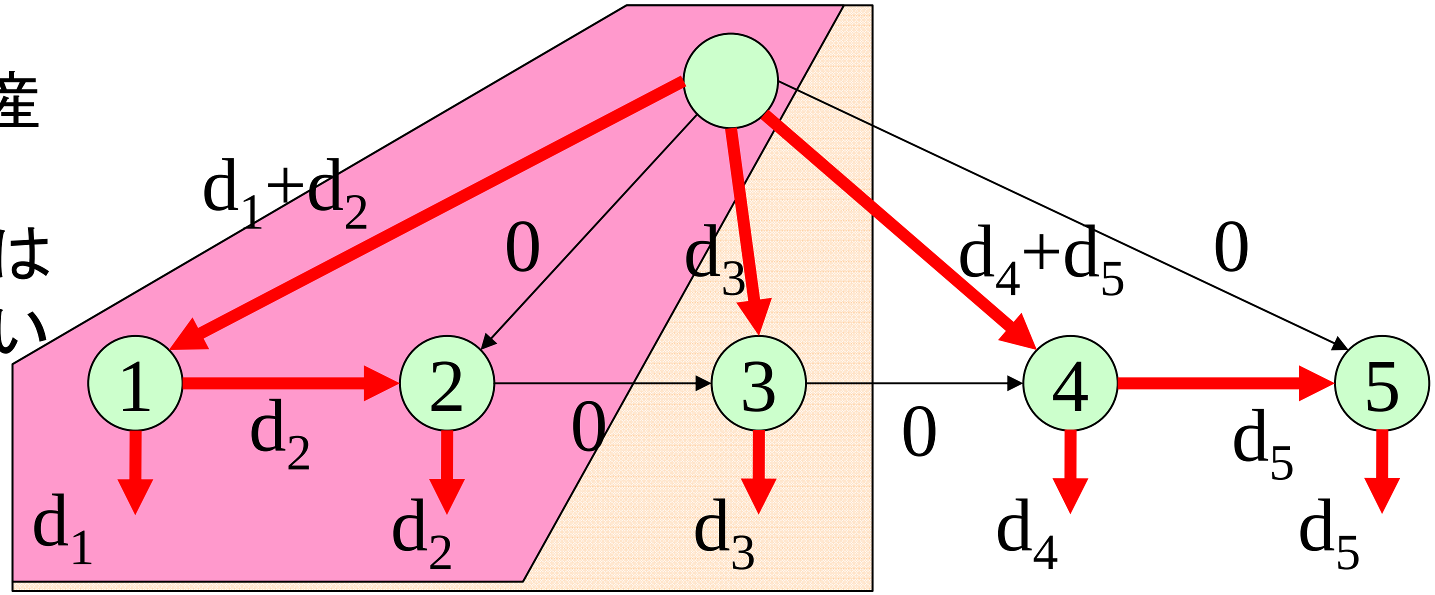
最適解の性質

次の条件を満たす最適解が存在

① $x_t > 0$ ならば $s_{t-1} = 0$（$s_{t-1} > 0$ ならば $x_t=0$）

② $x_t>0$ ならば，ある k に対して $x_t = d_t + d_{t+1} + \ldots + d_{t+k}$

第１～２期に生産した製品は第２期終了時には在庫に存在しない



部分問題P_2に対する最適解

部分問題P_3に対する最適解

ロットサイズ決定問題の再帰式

次の条件を満たす最適解が存在

① $x_t > 0$ ならば $s_{t-1} = 0$（$s_{t-1} > 0$ ならば $x_t=0$）

② $x_t>0$ ならば，ある k に対して $x_t = d_t + d_{t+1} + \ldots + d_{t+k}$

⇓

①，②を満たす最適解において $x_t>0$ ならば，

$(x_1, x_2, \ldots, x_{t-1})$ は部分問題 P_t に対する最適解である

部分問題 P_k の最適値をH(k)とおくと，

$$H(k) = \min_{1 \le t \le k} \left\{ H(t-1) + f_t + c_t \sum_{i=t}^{k} d_i \right\}, \quad H(0) = 0$$

ロットサイズ決定問題の再帰式

次の条件を満たす最適解が存在

① $x_t > 0$ ならば $s_{t-1} = 0$（$s_{t-1} > 0$ ならば $x_t=0$）

② $x_t>0$ ならば，ある k に対して $x_t = d_t + d_{t+1} + \ldots + d_{t+k}$

①，②を満たす最適解において $x_t>0$ ならば，

$(x_1, x_2, \ldots, x_{t-1})$ は部分問題 P_{t-1} に対する最適解である

部分問題 P_k の最適値をH(k)とおくと，　　　　(H(0)=0)

$$H(k) = \min_{1 \le t \le k} \left\{ H(t-1) + f_t + p_t \sum_{i=t}^{k} d_i + \sum_{j=t}^{k-1} h_j \sum_{i=j+1}^{k} d_i \right\}$$

ロットサイズ決定問題の問題例

- n: 期間数 = 4
- f_t : 第t期における製造開始コスト (12,20,16,8)
- p_t : 第t期における製品１単位当りの製造コスト (3,3,3,3)
- h_t : 第t期における製品１単位当りの保管コスト (1,2,1,1)
- d_t : 第t期における製品の需要量 (2,4,5,1)

H(0)	H(1)	H(2)	H(3)	H(4)
0				

最適解の性質（証明）

次の条件を満たす最適解が存在

① $x_t > 0$ ならば $s_{t-1} = 0$（$s_{t-1} > 0$ ならば $x_t=0$）

② $x_t>0$ ならば，ある k に対して $x_t = d_t + d_{t+1} + \ldots + d_{t+k}$

（①の証明）t ≦ m に対して①を満たす最適解(x, s, y)が存在すると仮定，
t ≦ m+1 に対して条件を満たす最適解が存在することを示す．
$s_m>0$のとき，ある u≦mに対して $x_u>0, x_{u+1}=\ldots=x_m=0, s_u, s_{u+1}, \ldots, s_m>0$
すなわち，第m+1期において，第u期で生産された製品がまだ保管されている．
解の最適性より，$x_{m+1}>0$ならば $p_{m+1} = p_u +s_u+\ldots+s_m$
よって，xm+1 を減らしてx_uを増やしても，またx_{m+1} を減らしてx_uを増やしても，解の最適性は変わらない．
このことより，最適性を保ったまま，x_{m+1}とs_mのどちらかを0にすることが出来る．
このようにして得た最適解は, t≦m+1に対して条件①を満たしている．

（②の証明）条件①を使うと示すことが出来る．