情報システム評価学
―整数計画法―

第3回目：組合せ緩和
解きやすい整数計画問題

塩浦昭義（東北大学 大学院情報科学研究科 准教授）

最適性の判定

最大化 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
条件： $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$

- 許容解 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が最適かどうか，判定したい
- 最適値 z に対し，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq z$ が成立
  （$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は z の下界値(lower bound)）
- 最適値 z の上界値(upper bound) z' で，
  $z' = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を満たすものが存在
  ➔ x は最適解　　$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z = z'$

最適値の上界値と緩和問題

- 最適値の上界値をどのようにして求めるか
  ➔ 緩和問題を利用
- 緩和問題：元の整数計画問題を簡単にしたもの
  - 緩和問題は元の問題より解きやすい
  - 緩和問題の最適値 ≧ 元問題の最適値
    ➔ 上界値を得る
- 緩和問題をどのようにして作るか？
  - 線形計画緩和
  - 組合せ緩和
  - ラグランジュ緩和

線形計画緩和

- **線形計画緩和**:線形整数計画問題から整数条件を削除して緩和

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}\ & 5x_1 + 9x_2 \\
\text{条件：}\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
& 8x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\
& x_1, x_2 \text{は整数}
\end{aligned}
$$

線形整数計画問題

⇒

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}\ & 5x_1 + 9x_2 \\
\text{条件：}\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
& 8x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

線形計画問題

- 解きにくい問題➔ 解きやすい問題
- 条件が緩くなるので，最適値が大きくなる（小さくはならない）

緩和問題の一般的な作り方

一般的な線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{(IP)} & \text{最大化} \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
 & \text{条件：} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X
\end{array}
$$

- 許容解の集合 X をより大きい集合 T⊇X に置き換える
- 目的関数 f をより大きい関数 f ’ ≧ f に置き換える

$$
\begin{array}{ll}
\text{(RP)} & \text{最大化} \quad f'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
 & \text{条件：} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T
\end{array}
$$

性質:(RP) の最適値 ≧ (IP) の最適値

証明:(IP) の最適解 x* ➔ x* ∈X ⊆ T ➔x* は (RP)の許容解

∴ (RP)の最適値 ≧ f ’(x*) ≧ f(x*) = (IP)の最適値

組合せ緩和

- 組合せ緩和問題:難しい組合せ最適化問題をより簡単な組合せ最適化問題に置き換える
- 難しい組合せ最適化問題
  - 巡回セールスマン問題
  - ナップサック問題
- より簡単な組合せ最適化問題
  - 割当問題
  - 最小全域木問題(の変種)

巡回セールスマン問題の組合せ緩和

- 巡回セールスマン問題の定式化

$$最小化 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$条件：\sum_{j:j\neq i} x_{ij} = 1 \ (i = 1,\ldots,n)$$

$$\sum_{i:i\neq j} x_{ij} = 1 \ (j = 1,\ldots,n)$$

$$\cancel{\sum_{i\in S}\sum_{j\notin S} x_{ij} \geq 1 \ (S \subset \{1,\ldots,n\},\ S \neq \emptyset)}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j \in \{1,\ldots,n\}, i \neq j)$$

割当問題の
定式化と同じ

この条件
を削除

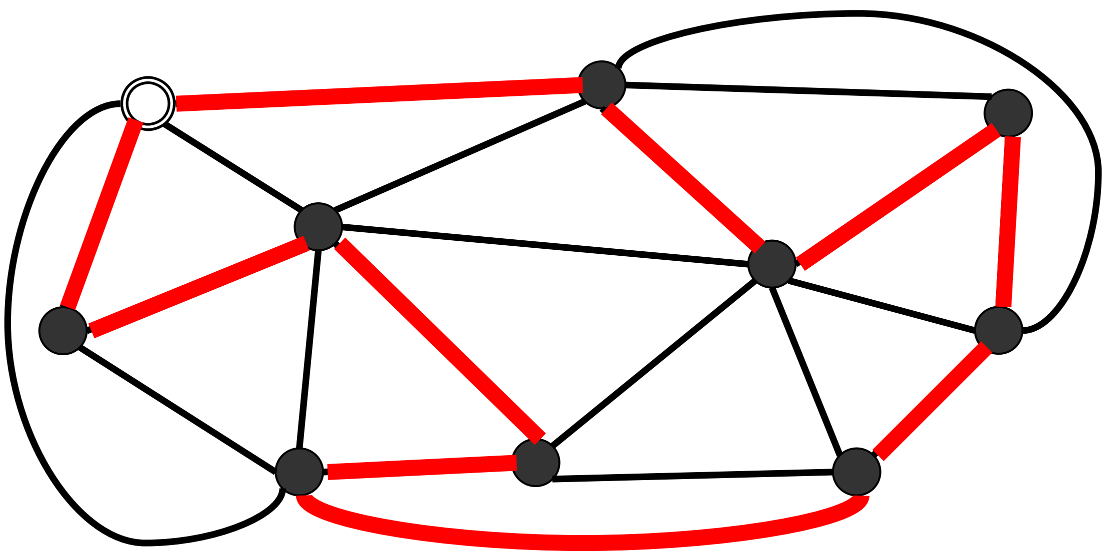
対称巡回セールスマン問題の組合せ緩和

- 巡回セールスマン問題は対称⇔ $c_{ij} = c_{ji}$ ($\forall$ i,j)

対称巡回セールスマン問題を無向グラフの問題として定式化

$$\text{最小化} \ \sum_{e \in X} c_e \quad \text{条件:} \ X \subseteq E, \ X \ \text{は} G \text{のハミルトン閉路}$$

G = (V, E): 無向グラフ, c_e (e∈E): 枝の長さ

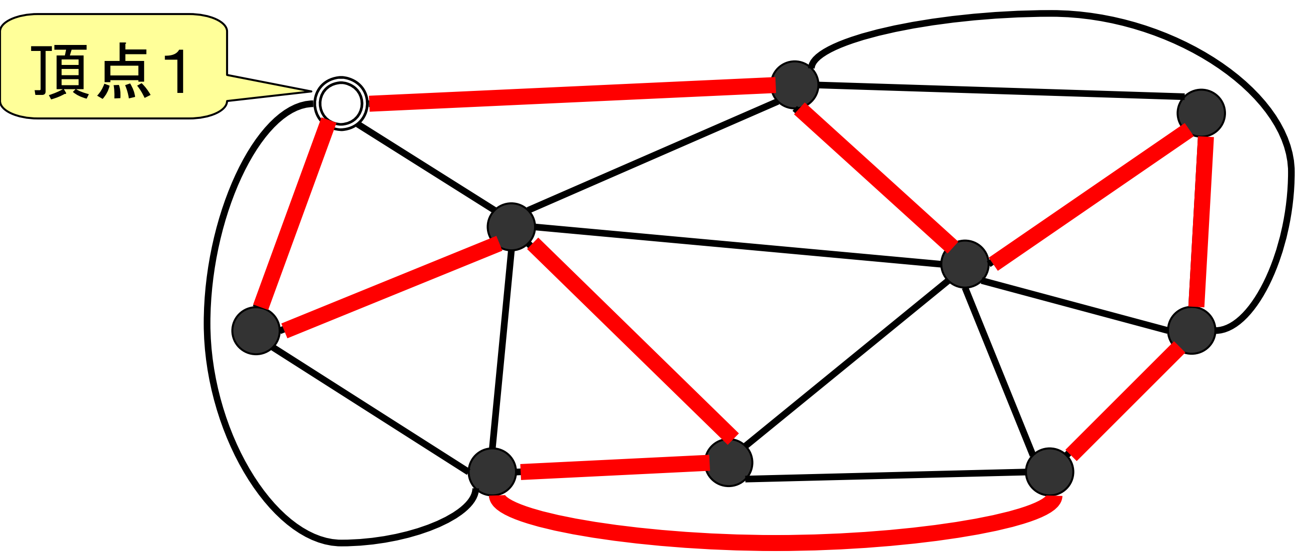


ハミルトン閉路:

すべての頂点をちょうど一回ずつ通る閉路

対称巡回セールスマン問題の組合せ緩和

- ハミルトン閉路の性質
  - 頂点１にちょうど2本の枝が接している
  - 頂点１に接している枝を1本削除すると全域木になる
- 上記の性質を満たす枝集合を「１木(1-tree)」と定義
  - ハミルトン閉路は１木である

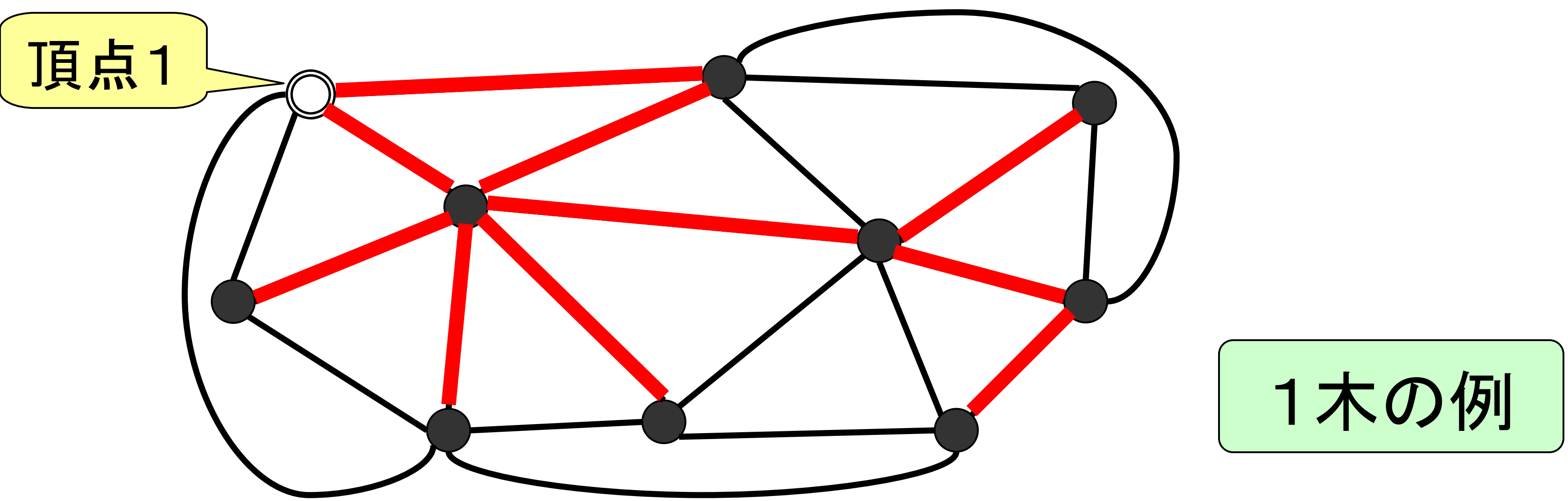


対称巡回セールスマン問題の組合せ緩和

- 頂点１にちょうど2本の枝が接している
- 頂点１に接している枝を1本削除すると全域木になる

□ 上記の性質を満たす枝集合を「１木(1-tree)」と定義

- ハミルトン閉路は１木である
- 長さ最小の１木は貪欲アルゴリズムで簡単に求められる



対称巡回セールスマン問題の組合せ緩和

- ハミルトン閉路は１木である
- 長さ最小の１木は貪欲アルゴリズムで簡単に求められる

$$\text{最小化} \quad \sum_{e \in X} c_e \quad \text{条件: } X \subseteq E,\ X \text{ は} G \text{のハミルトン閉路}$$

緩和

$$\text{最小化} \quad \sum_{e \in X} c_e \quad \text{条件: } X \subseteq E,\ X \text{ は} G \text{の１木}$$

ナップサック問題の組合せ緩和

- ナップサック問題の許容解集合（a_j, b は正の実数）

$$X = \{x \in \mathbf{Z}^n \mid \textstyle\sum_{j=1}^n a_j x_j \le b,\ \ x_j \ge 0\ \ (j = 1, \ldots, n)\}$$

$$\Downarrow$$

$$T = \{x \in \mathbf{Z}^n \mid \textstyle\sum_{j=1}^n \lfloor a_j \rfloor x_j \le \lfloor b \rfloor,\ \ x_j \ge 0\ \ (j = 1, \ldots, n)\}$$

$\lfloor a_j \rfloor, \lfloor b \rfloor$ はそれぞれ a_j, b の整数への切り捨て

$X \subseteq T$ が成り立つ $\Longrightarrow$ X を T に置き換えると緩和になる

※ナップサック問題からナップサック問題への緩和

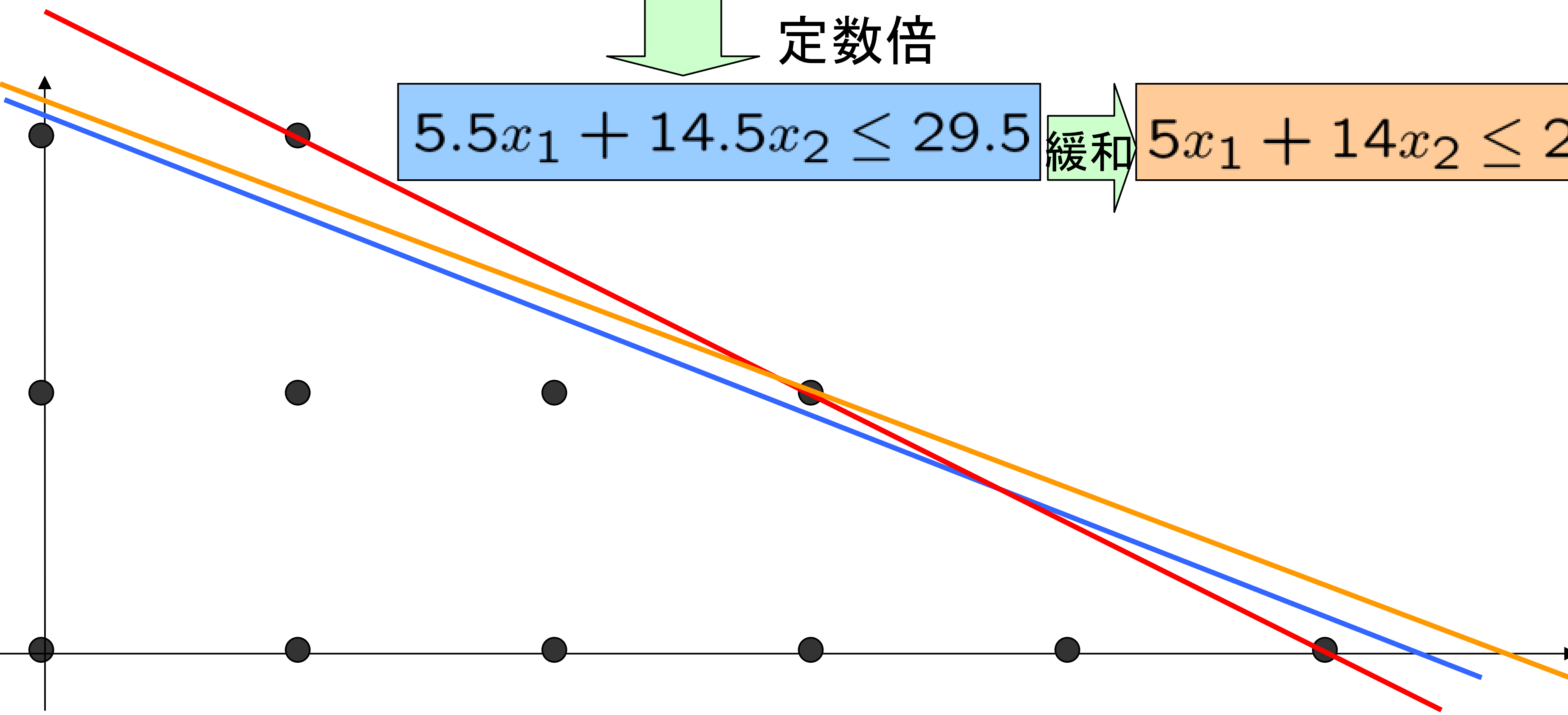
ナップサック問題の組合せ緩和

例:

$$1.1x_1 + 2.9x_2 \leq 5.9 \xrightarrow{\text{緩和}} x_1 + 2x_2 \leq 5$$

定数倍

$$5.5x_1 + 14.5x_2 \leq 29.5 \xrightarrow{\text{緩和}} 5x_1 + 14x_2 \leq 29$$

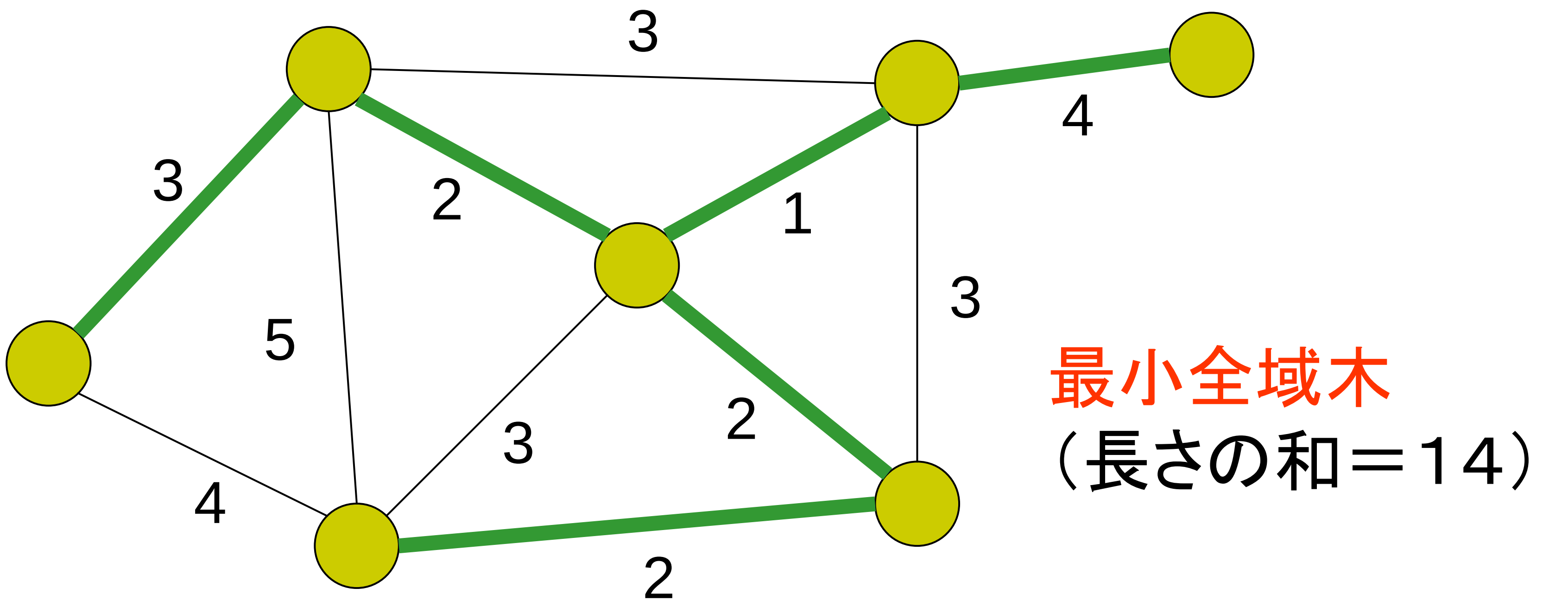


解きやすい整数計画問題

- 整数計画問題(組合せ最適化問題)は一般にNP困難(NP-hard)
  - 最適解を求めるには指数時間が必要(と思われる)
- 解きやすい整数計画問題も存在する
  - 「解きやすい」＝「多項式時間アルゴリズムが存在」
  - 例：最大フロー，最小費用フロー，最小全域木，など
- 解きやすい問題の構造
  - 最大フロー，最小費用フロー➔完全単模行列
  - 最小全域木➔マトロイド

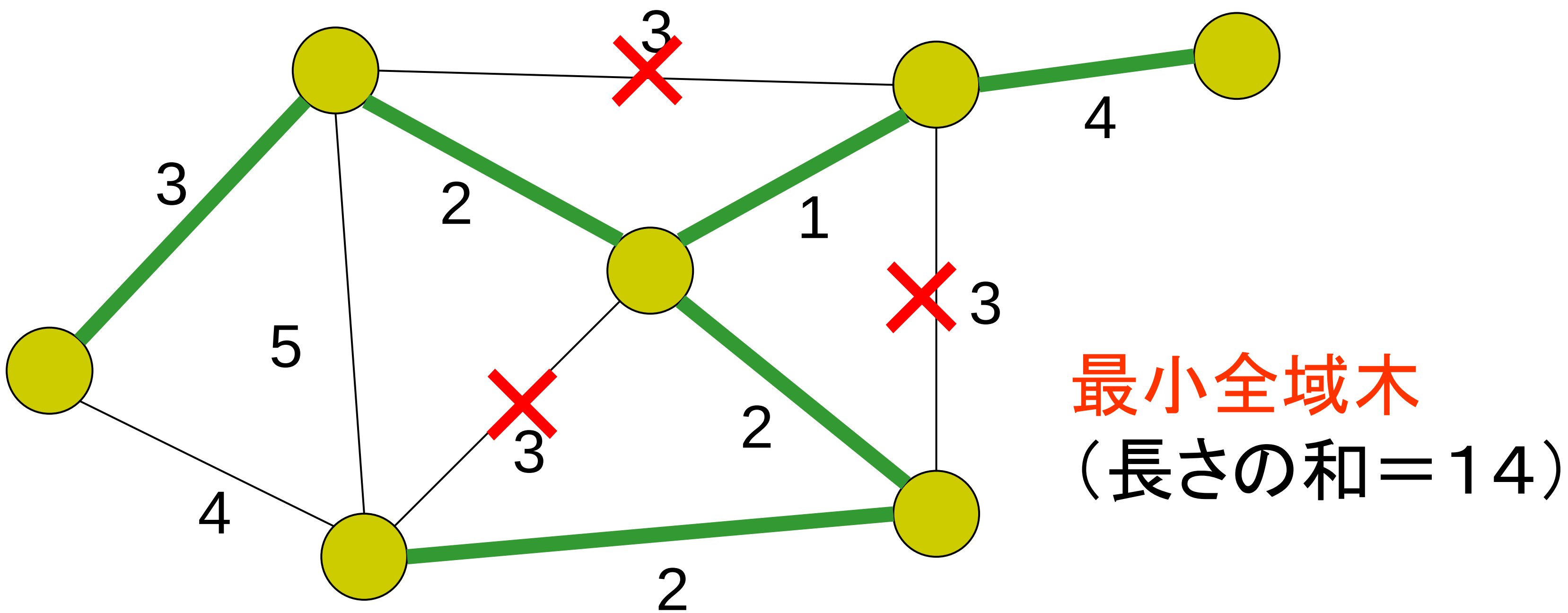
最小全域木問題

- 入力：無向グラフ$G=(V,A)$，各枝(i,j)の長さc_{ij}
- 出力：Gの最小全域木（Gの全域木で，枝の長さの和が最小のもの）



最小全域木問題に対する貪欲アルゴリズム

- 短い枝から順に，閉路が出来ないように追加



貪欲アルゴリズムとマトロイド

- 最小全域木問題がなぜ貪欲アルゴリズムを使って解けるか？
  ➔閉路をもたない枝集合の集まり $\mathcal{F}$ はマトロイド
- 集合Aの部分集合の族 $\mathcal{F}$ がマトロイド
  ➔ 貪欲アルゴリズムで最適解が求められる
- マトロイドの例:
  - 行列の一次独立な列ベクトルの集合の族
  - 集合Aの部分集合で，要素数がｋ以下のものの集まり
  - 集合$A_1, A_2, \ldots, A_m$の各々から高々一つずつ要素をとってきたものの集まり

マトロイドの定義

- 集合Aの部分集合の族 $\mathcal{F}$ はマトロイド

⇕

(1) $X \in \mathcal{F},\ Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \mathcal{F}$

(2) $X, Y \in \mathcal{F},\ |X| < |Y| \Longrightarrow \exists e \in Y \setminus X\colon\ X \cup \{e\} \in \mathcal{F}$

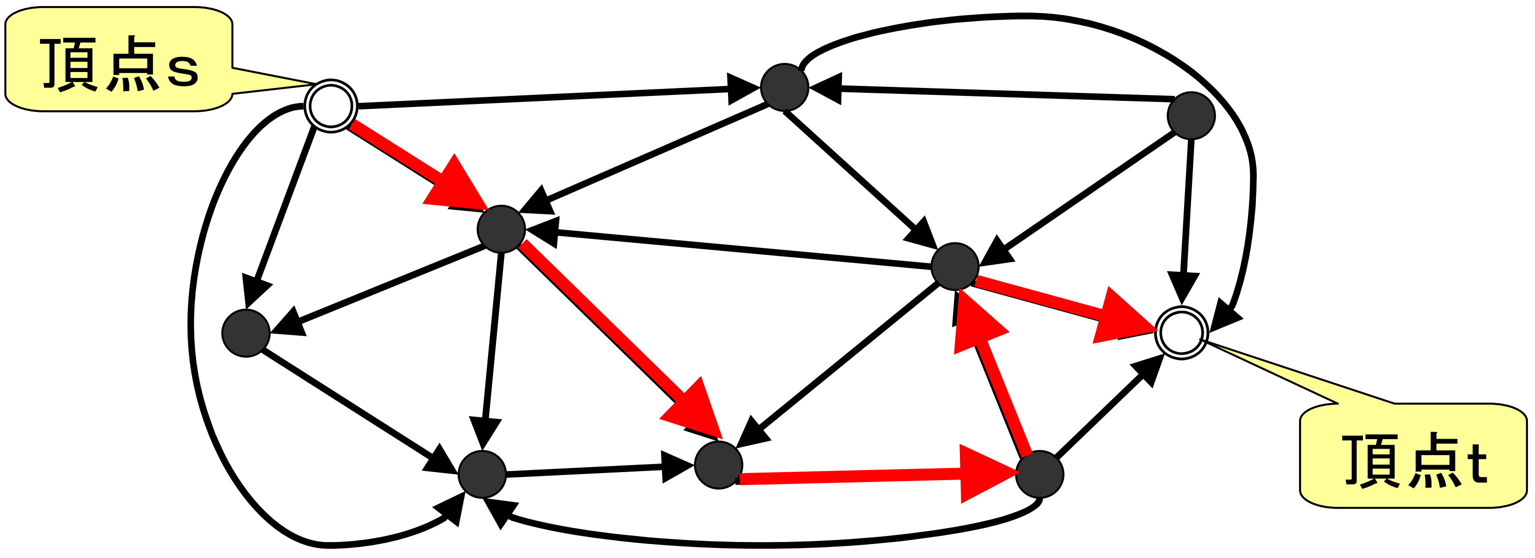
$\mathcal{F}$ ＝閉路をもたない枝集合の族のときの解釈

（1）Xが閉路をもたない枝集合のとき，Xの部分集合も閉路をもたない

（2）X，Yともに閉路をもたない枝集合で，|X|<|Y| ならばYのある枝をひとつXに加えても閉路が出来ない

最短路問題

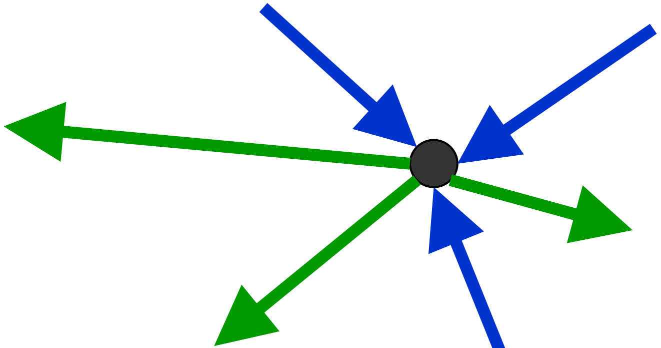
- 入力 : 有向グラフ G = (V, A), 2頂点 s, t∈V
  各枝 (i, j) の長さ c_{ij}
- 出力 : s から t への長さ最短の有向パス



最大フロー問題

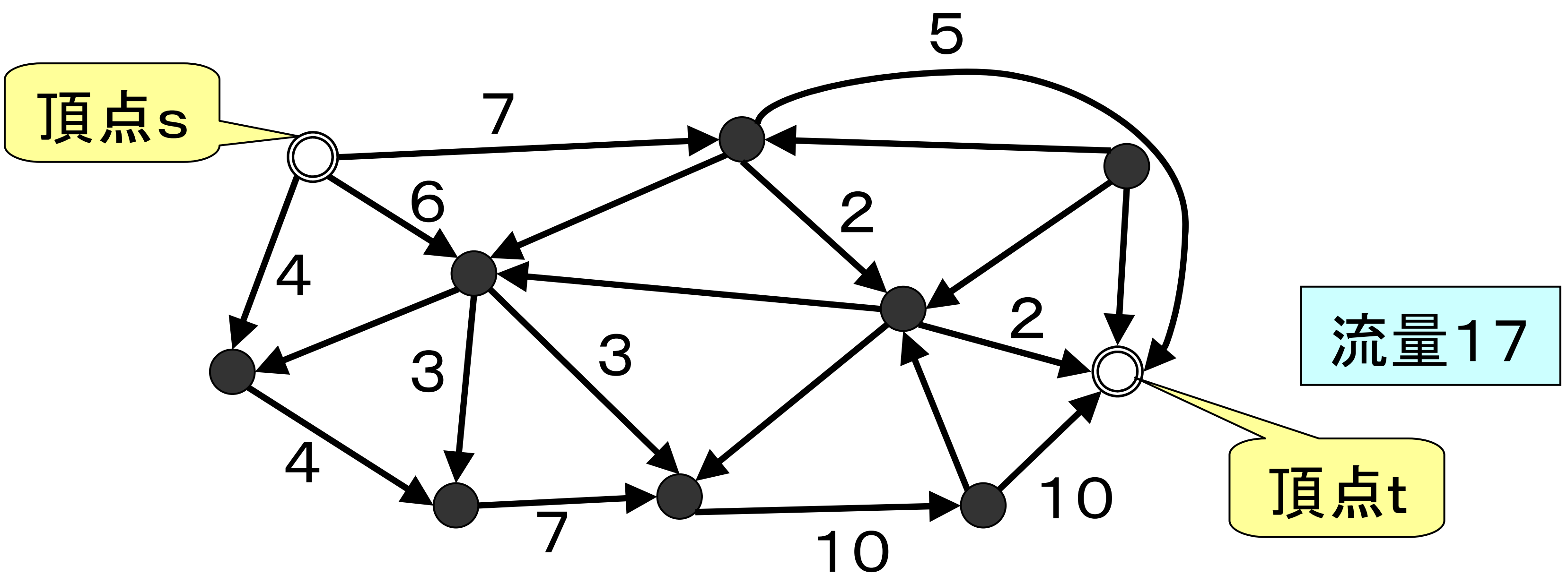
- 入力：有向グラフ $G = (V, A)$, 2頂点 $s, t \in V$
  各枝 (i, j) の容量 $u_{ij} \in Z$
- 出力：s から t への流量最大の（整数）フロー $x \in Z^A$
- フロー $x \in Z^A$ の条件
  - 各枝(i, j) での容量条件 $0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$
  - s, t 以外の頂点 i での流量保存条件

  $\Sigma\{x_{ij} \mid (i,j)$は i から出る枝$\} - \Sigma\{x_{ki} \mid (k,i,)$は i に入る枝$\} = 0$



最大フロー問題

- 入力 : 有向グラフ G = (V, A), 2頂点 s, t∈V
  各枝 (i, j) の容量 u_{ij}
- 出力 : s から t への流量最大の（整数）フロー $x \in R^A$



最小費用フロー問題

- 入力 : 有向グラフ $G = (V, A)$, 2頂点 $s, t \in V$
  各枝 (i, j) の容量 $u_{ij} \in Z$, コスト $c_{ij} \in R$
  各頂点 i の供給（需要）量 $b_i \in Z$
- 出力 : s から t への需要供給を満たす最小費用の整数フロー $x \in Z^A$
- フロー $x \in Z^A$ の条件
  - 各枝(i, j) での容量条件 $0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$
  - 各頂点 i での流量保存条件

$\Sigma\{x_{ij} \mid (i,j)$は i から出る枝$\} - \Sigma\{x_{ki} \mid (k,i,)$は i に入る枝$\} = 0$

最小費用フロー問題の定式化

- 整数計画問題として定式化

$$\text{最小化} \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{条件：} \sum\{x_{ij} \mid (i,j)\text{は}i\text{から出る枝}\}$$
$$- \sum\{x_{ki} \mid (k,i)\text{は}i\text{に入る枝}\} = b_i \;\; (i \in V)$$
$$0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \;\; x_{ij} \text{ は整数 } ((i,j) \in A)$$

- 行列とベクトルを使って書き換え

$$\text{最小化 } c^T x$$
$$\text{条件：} Mx = b$$
$$0 \le x \le u, \;\; x \in \mathbf{Z}^A$$

行列MはグラフGの接続行列

最短路問題は最小費用フロー問題の特殊ケース

$$\text{最小化} \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{条件：} \sum\{x_{ij} \mid (i,j)\text{ は } i \text{ から出る枝}\} - \sum\{x_{ki} \mid (k,i)\text{ は } i \text{ に入る枝}\} = b_i \ (i \in V)$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij},\ x_{ij}\text{ は整数 } ((i,j) \in A)$$

- c_{ij} = 枝(i,j)の長さ，$u_{ij} = 1$
- $b_s = 1$, $b_t = -1$, その他の頂点 $b_i = 0$
- ➔ 最小費用フローは，s から t へのパスPに沿って流れる流量1のフロー，Pの費用（長さ）は最小
- ➔ Pは最短路問題の最適解

最大フロー問題は最小費用フロー問題の特殊ケース

$$\text{最小化} \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{条件}: \sum\{x_{ij} \mid (i,j)\text{は}i\text{から出る枝}\} - \sum\{x_{ki} \mid (k,i)\text{は}i\text{に入る枝}\} = b_i \ (i \in V)$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \ x_{ij} \text{ は整数 } ((i,j) \in A)$$

- 頂点 s に接続する枝について $c_{sj} = 1$, $c_{js} = -1$, その他の枝は $c_{ij} = 0$
- $b_s = +\infty$, $b_t = -\infty$, その他の頂点 $b_i = 0$

➔ 最小費用フローは最大フローに一致

最小費用フロー問題はなぜ解きやすいか？

- 定式化

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化 } c^T x \\
&\text{条件：} Mx = b \\
&\qquad 0 \le x \le u, \;\; x \in \mathbf{Z}^A
\end{aligned}
$$

行列MはグラフGの接続行列

- 整数条件を除去➔線形計画緩和

性質:最小費用フロー問題の線形緩和は,
整数ベクトルであるような最適解を必ずもつ

このような性質をもつ
整数計画問題は
他に存在するか？

ただし, b と u は整数ベクトルと仮定

完全単模行列

- 整数計画問題

$$\text{最大化 } c^T x \quad \text{条件}: Mx \le b \ \ x \in \mathbf{Z}^A$$

は，係数行列Mが良い性質をもっていると解きやすい

  - 線形計画緩和の最適解で整数ベクトルであるものが存在

- 行列 M は完全単模(totally unimodular)

⇔任意の部分正方行列の行列式の値が0, +1, −1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ \bigcirc \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \times$$

完全単模行列

性質:整数計画問題

$$\text{最大化}\ c^T x \quad \text{条件}: Mx \le b\ \ x \in \mathbf{Z}^A$$

は，係数行列Mが完全単模ならば，線形計画緩和の最適解で整数ベクトルであるものが存在

完全単模行列の例:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

有向グラフの接続行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行（または列）に1が連続して現れる行列