情報システム評価学
ー整数計画法ー

第2回目：最適性，緩和，バウンド
解きやすい整数計画問題

塩浦昭義（東北大学 大学院情報科学研究科 准教授）

整数計画問題(integer programming problem)

- 「変数が整数である」と言う条件をもつ数理計画問題

例１：

最大化 $5x_1 + 9x_2$

条件： $2x_1 + x_2 \le 4$

$8x_1 + 3x_2 \le 6$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

x_1, x_2 は整数

線形計画問題
＋「全部の変数が整数」という条件
➔（線形）整数計画問題
(linear integer programming problem, IP)

許容解：問題の条件をすべて満たす解
最適解：目的関数を最大（最小）にする許容解

整数計画問題(integer programming problem)

- 「変数が整数である」と言う条件をもつ数理計画問題

例２：

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad 5x_1 + 9x_2 \\
&\text{条件：} \quad 2x_1 + x_2 \le 4 \\
&\qquad\qquad 8x_1 + 3x_2 \le 6 \\
&\qquad\qquad x_1, x_2 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

「全部の変数が0または1」という条件

➔0-1整数計画問題

(0-1 integer programming problem, 0-1IP)

※一般には，「整数計画問題(IP)」といったら

（線形）整数計画問題，もしくは 0-1整数計画問題，

のことを指す

組合せ最適化問題

- 0-1整数計画問題のほとんどは次のように書ける:

「ある集合 E の部分集合 X で条件を満たすものうち, 重み(長さ)の総和 $\sum \{c_i \mid i \in X\}$ を最大化するものを求める」

➔ 組合せ最適化問題と呼ばれる

- ナップサック問題(E＝アイテムすべての集合)
- 最小全域木問題(E＝グラフの枝の集合)
- 巡回セールスマン問題(E＝都市の順序対の集合)
- 割当問題(E＝仕事と人のペアの集合)

整数計画問題(integer programming problem)

- 「変数が整数である」と言う条件をもつ数理計画問題

例３：

最大化 $5x_1 + 9x_2 + 4y$

条件： $2x_1 + x_2 - 3y \leq 4$

$8x_1 + 3x_2 + 7y \leq 6$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ y \geq 0$

x_1, x_2 は整数

線形計画問題

＋「一部の変数が整数」という条件

➔（線形）混合整数計画問題

(linear mixed integer programming problem, MIP)

より一般的な整数計画問題

- 目的関数，条件式が非線形であっても良い

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化}\ \ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\text{条件：}\ \ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0\ \ (i = 1, 2, \ldots, m) \\
&\qquad\quad x_1, x_2, \ldots, x_n\ \text{は整数}
\end{aligned}
$$

n, m: 正の整数

$f, g_i\ (i = 1, 2, \ldots, m)$: n 変数関数

- 許容解を集合で表すこともある

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化}\ \ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\text{条件：}\ \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X
\end{aligned}
$$

$X \subseteq \mathbf{Z}^n$

整数ベクトルの集合

最適性の判定

$$\text{最大化}\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\text{条件：}\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$$

- 許容解 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が最適かどうか，判定したい
- 最適値 z に対し，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq z$ が成立
  （$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は z の下界値(lower bound)）
- 最適値 z の上界値(upper bound) z' で，
  $z' = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を満たすものが存在
  ➔x は最適解　　$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z = z'$

最適値の上界値と緩和問題

- 最適値の上界値をどのようにして求めるか
  ➔ 緩和問題を利用
- 緩和問題：元の整数計画問題を簡単にしたもの
  - 緩和問題は元の問題より解きやすい
  - 緩和問題の最適値 ≧ 元問題の最適値
    ➔ 上界値を得る
- 緩和問題をどのようにして作るか？
  - 線形計画緩和
  - 組合せ緩和
  - ラグランジュ緩和

線形計画緩和

- **線形計画緩和**:線形整数計画問題から整数条件を削除して緩和

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}\ & 5x_1 + 9x_2 \\
\text{条件：}\ & 2x_1 + x_2 \le 4 \\
& 8x_1 + 3x_2 \le 6 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\
& x_1, x_2 \text{は整数}
\end{aligned}
$$

線形整数計画問題

→

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}\ & 5x_1 + 9x_2 \\
\text{条件：}\ & 2x_1 + x_2 \le 4 \\
& 8x_1 + 3x_2 \le 6 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

線形計画問題

- 解きにくい問題➔ 解きやすい問題
- 条件が緩くなるので，最適値が大きくなる（小さくはならない）

線形計画緩和

- 線形計画緩和:線形整数計画問題から整数条件を削除して緩和
  - 場合によっては，緩和問題の最適解が元の問題の最適解になることもある

0-1ナップサック問題

最大化 $7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4$

条件： $3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$

→

線形計画緩和

最大化 $7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4$

条件： $3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 6$

$0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$

(1, 1, 0, 0) は最適解

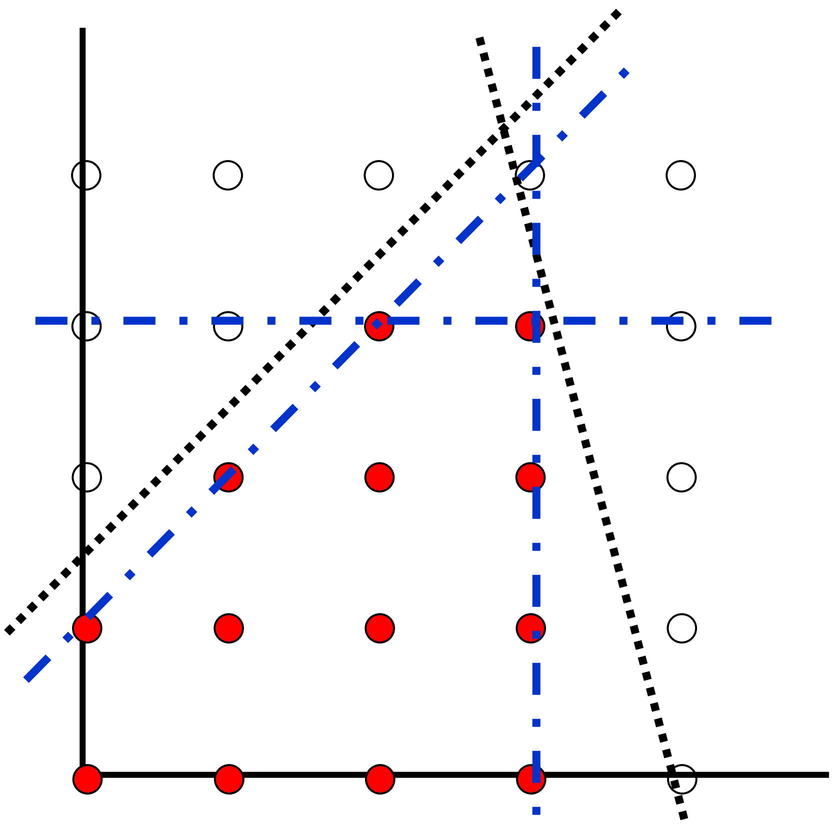
整数条件を満たすので，元の問題の最適解でもある

良い定式化

- 同じ解集合に対して，複数の定式化が存在

$$x_1 + 1.5 \geq x_2$$
$$-4x_1 + 15.8 \geq x_2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 1 \geq x_2$$
$$x_1 \leq 3,\ x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



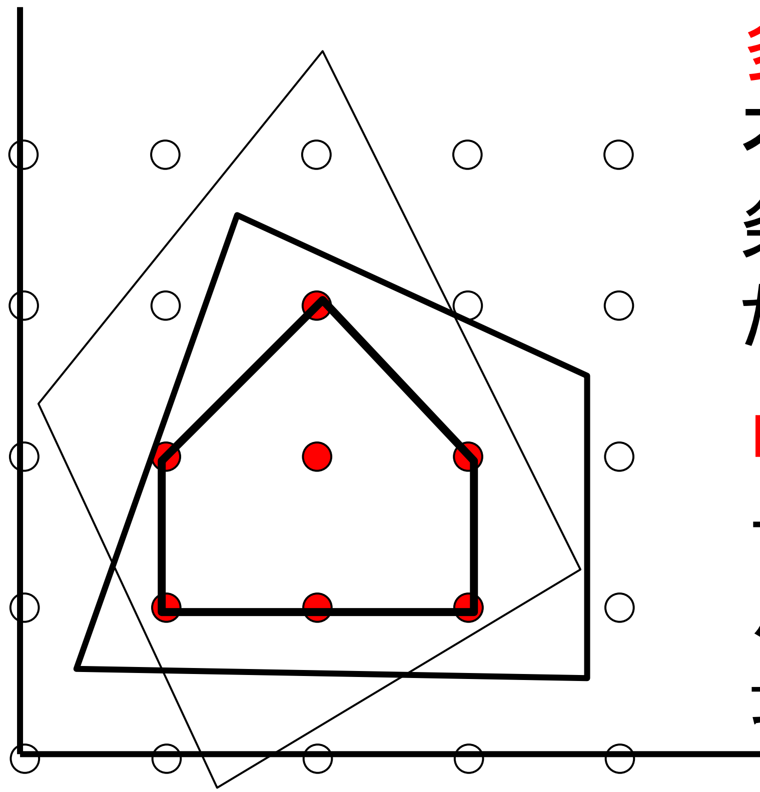
どちらが良い定式化か？

良い定式化

- 同じ解集合に対して，複数の定式化が存在
- どれが良い定式化か？―LP緩和の観点から

解集合を含む
多面体がより小さい
➔LP緩和の最適値が
より大きい
➔より大きい上界値

LPの最適解は
多面体の端点
➔多面体の端点が
すべて整数解
ならばベスト



多面体：
不等式・等式
条件で囲まれ
た領域

凸包：
与えられた
点集合を含む
最小の多面体

良い定式化の例

- 0-1ナップサック問題

$$\{x \in \{0,1\}^4 \mid 83x_1 + 61x_2 + 49x_3 + 20x_4 \leq 100\}$$

解集合は$\{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),$
$(0,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$

$$P_1 = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid 83x_1 + 61x_2 + 49x_3 + 20x_4 \leq 100,\ 0 \leq x \leq 1\}$$
$$P_2 = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4,\ 0 \leq x \leq 1\}$$
$$P_3 = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_1 + x_4 \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$$

$P_1 \supset P_2 \supset P_3$, P_3 は解集合の凸包（最良の定式化）

※注意：より良い定式化は、より多くの条件式を要することがある

緩和問題の一般的な作り方

一般的な線形計画問題

$$
\begin{aligned}
\text{(IP)}\quad &\text{最大化}\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\text{条件:}\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X
\end{aligned}
$$

- 許容解の集合 X をより大きい集合 T ⊇ X に置き換える
- 目的関数 f をより大きい関数 f ’ ≧ f に置き換える

$$
\begin{aligned}
\text{(RP)}\quad &\text{最大化}\ f'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\text{条件:}\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T
\end{aligned}
$$

性質:(RP) の最適値 ≧ (IP) の最適値

証明:(IP) の最適解 x* ➔ x* ∈X ⊆ T ➔x* は (RP)の許容解

∴ (RP)の最適値 ≧ f ’(x*) ≧ f(x*) = (IP)の最適値

緩和問題の性質1

(IP) 最大化 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
条件： $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$

2つの緩和問題

(RP1) 最大化 $f'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
条件： $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_1$

(RP2) 最大化 $f'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
条件： $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_2$

どちらの緩和問題がより良い上界値を与えるか？

性質：$T_1 \subseteq T_2$ ➔(RP1)の最適値 ≦ (RP2) の最適値

- 緩和問題の最適値は元問題の最適値の上界
  ➔より小さい方が良い
  ➔集合 T は小さい方が良い

緩和問題の性質2

(IP) 最大化 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
条件： $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$

緩和問題

(RP) 最大化 $f'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
条件： $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T$

緩和問題を解くだけで，元の問題が解けてしまうこともある

性質(i): (RP)が許容解をもたない➔(IP)も許容解をもたない
性質(ii):(RP)の最適解 x* が x*∈X, f '(x*) = f(x*) を満たす
➔ x* は (IP) の最適解

ラグランジュ緩和

- 条件の一部(もしくは全て)を単に削除するのではなく，目的関数に反映させる

最大化 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

条件： $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$

$x \in X \ (\subseteq \mathbf{Z}^n)$

各不等式の
(右辺)ー(左辺)
に u_i をかけて
目的関数に加える

最大化 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} u_i (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j)$

条件： $x \in X \ (\subseteq \mathbf{Z}^n)$

ラグランジュ緩和

最大化 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

条件： $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$

$x \in X \ (\subseteq \mathbf{Z}^n)$

(IP)

最大化 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} u_i (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j)$

条件： $x \in X \ (\subseteq \mathbf{Z}^n)$

(RP)

性質: (RP)の最適値≧(IP)の最適値

証明： (IP) の最適解 x^* は (RP) の許容解, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \leq b_i$ を満たす

$$(\mathrm{RP})\text{の最適値} \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* + \sum_{i=1}^{m} u_i (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*)$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = (\mathrm{IP})\text{の最適値}$$

演習問題（締切：11月10日）

① 第1回のスライド「0－1ナップサック問題の定式化」
- 7つのプロジェクトに対する次の条件を0－1変数を使って式で表せ
  - ① 7つのプロジェクト全てには投資してはならない
  - ② 少なくとも一つのプロジェクトには投資しなければならない
  - ③ プロジェクト3に投資したら，プロジェクト1には投資できない
  - ④ プロジェクト4に投資するならば，プロジェクト2にも投資しなければならない
  - ⑤ プロジェクト1と5については，一方だけに投資することは禁止

② 次の問題を混合整数計画問題として定式化せよ.
- ① 最小化 $\min\{x_1, x_2\}$ 条件 $0 \leqq x_1, x_2 \leqq c$, $(x_1, x_2) \in X$
- ② 最小化 $|x_1 - x_2|$ 条件 $0 \leqq x_1, x_2 \leqq c$, $(x_1, x_2) \in X$

ここで c は正の定数，X は2次元整数ベクトルの集合

③ 次の式を証明せよ

$$
\begin{aligned}
&\{x \in \{0,1\}^4 \mid 97x_1 + 32x_2 + 25x_3 + 20x_4 \leq 139\} \\
&= \{x \in \{0,1\}^4 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3\} \\
&= \{x \in \{0,1\}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 \leq 2, x_1 + x_2 + x_4 \leq 2, x_1 + x_3 + x_4 \leq 2\}
\end{aligned}
$$

演習問題（締切：11月10日）

④ 第1回の巡回セールスマン問題の定式化において、定式化の解が巡回路と１対１に対応することを証明せよ.

⑤ Nクイーン問題の解の条件を、線形等式・不等式および整数条件を使って表現せよ.

- Nクイーン問題：N×Nのチェス盤の上に，N個のクイーンのコマを各行に一つ，各列に一つ，各対角線に一つ，となるような配置する問題

⑥ スライド「緩和問題の性質2」の性質(i), (ii)を証明せよ.

⑦ スライド「ナップサック問題の組合せ緩和」のところで，X⊆T が成り立つことを証明せよ.

⑧ 問題（P2）は（P1）の緩和であることを証明せよ. ここで u は実数ベクトルである.

$$\text{(P1)}\quad \max\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\ (i=1,\ldots,m),\ x \in \{0,1\}^n\}$$

$$\text{(P2)}\quad \max\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \mid \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} (u_i a_{ij}) x_j = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i,\ x \in \{0,1\}^n\}$$