アルゴリズムとデータ構造

コンピュータサイエンスコース
知能コンピューティングコース

第7回

アルゴリズムの設計
（動的計画法）

塩浦昭義

情報科学研究科 准教授

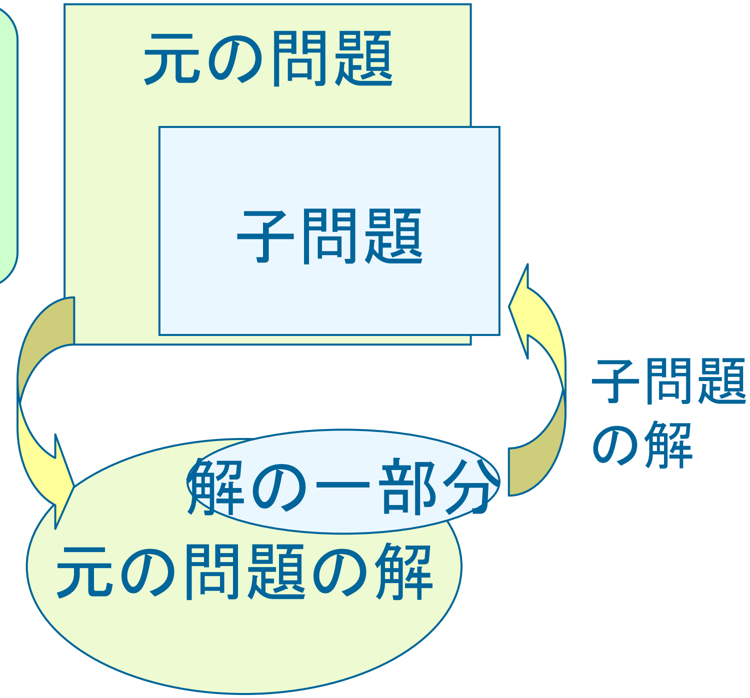
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching

動的計画法

「最適性の原理」
元の問題の解の部分解は,
元の問題の部分問題の解である

再帰的なアルゴリズム



このアプローチ，もしくはこのアプローチにより得られる
再帰的アルゴリズムを動的計画法という

動的計画法を使って部分和問題と0-1ナップサック問題を解く

部分和問題 (subset-sum problem)

- 入力: n+1 個の正整数 $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}; b)$
- 出力: $a_0x_0+a_1x_1+\ldots+a_{n-1}x_{n-1}=b$
を満たす0-1ベクトルが存在する➔yes, しない➔no

（別の見方: $a_0,a_1, \ldots,a_{n-1}$の幾つかを足し合わせて bに一致する➔yes, どう足し合わせても一致しない➔no）

例1: $a_0=5$, $a_1=3$, $a_2=2$, $b=7$　のとき,
$a_0+a_2=b$ が成り立つ ➔ yes

例2: a0=5, a1=3, a2=2, b =6　のとき,
a0, a1, a2をどのように足し合わせても b に一致しない
➔ no

部分和問題の解の性質

部分和問題 $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}; b)$ は

$x_{n-1}=1$ を満たす解をもつ

⇔部分和問題 $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}; b-a_{n-1})$ は解をもつ

$x_{n-1}=0$ を満たす解をもつ

⇔部分和問題 $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}; b)$ は解をもつ

元の問題が解をもつ⇔部分問題は解をもつ

最適性の原理

部分和問題 $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}; b)$ の

部分問題 $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k; p)$

ただし， $0 \leqq k \leqq n-1$, $0 \leqq p \leqq b$

※ $k=n-1$, $p=b$ のとき，元の問題に一致

部分和問題の解法

解の性質を使うと，部分問題を繰り返し解くことで
元の問題の解を得ることが可能

部分問題(a_0; p) を 0≦ p ≦b について解く

部分問題(a_0, a_1; p) を 0≦ p ≦b について解く

部分問題(a_0,…, a_{n-2}; p) を 0≦ p ≦b について解く

部分問題(a_0,…, a_{n-2}, a_{n-1}; p) を0≦ p ≦bについて解く

一つの部分問題は定数時間で解ける➔時間計算量O(nb)

部分和問題の解法の例

部分和問題(3,7,5,8,2; 11) を解く

部分問題(3; p) を 0≦ p ≦11 について解く

k＼p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	○	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×
1												
2												
3												
4												

p＝0 のときは
常に
解をもつ

p＝a_0 のときは
解をもつ
それ以外は
解をもたない

部分和問題の解法の例

部分和問題(3,7,5,8,2; 11) を解く

部分問題(3, 7; p) を 0≦ p ≦11 について解く

k＼p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	○	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×
1	○	×	×	○	×	×	×	○	×	×	○	×
2												
3												
4												

(a_0; p)が解をもつならば,
(a_0,a_1; p)も解をもつ

(a_0; p-a_1)が解をもつならば,
(a_0,a_1; p)も解をもつ

部分和問題の解法の例

部分和問題(3,7,5,8,2; 11) を解く

k＼p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	○	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×
1	○	×	×	○	×	×	×	○	×	×	○	×
2	○	×	×	○	×	○	×	○	○	×	○	×
3	○	×	×	○	×	○	×	○	○	×	○	○
4	○	×	○	○	×	○	×	○	○	○	○	○