アルゴリズムと データ構造

整列のアルゴリズム(Sorting Algorithms)

塩浦昭義
情報科学研究科　准教授
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp
http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching

なぜ「良い」アルゴリズムが必要か？ Why Good Algorithms are Needed?

- 「良い」アルゴリズムとは？
  - 時間計算量が短い
  - わかりやすい
  - 求めた解の質が良い，など
- アルゴリズムはプログラムの骨格を成す
  - 元のアルゴリズムがダメ＝プログラムの基本設計がダメ
  - ➔ プログラミングを頑張っても良いソフトウェアは出来ない
- いきなりプログラムを作るのではなく，きちんとアルゴリズムを設計することが重要

整列（ソート, Sorting）

- 全順序つきの集合の要素を順番に並べること
- 例1：数字の整列（小さい数から大きい数へ）

  ５１、２３、４６、９、３０

  ⇒　９、２３，３０，４６、５１
- 例2：名前の五十音順による整列

  しおうら、たなか、とくやま、すずき

  ⇒　しおうら、すずき、たなか、とくやま
- この講義では数字の整列を扱う

ソートのアルゴリズム
Algorithms for Sorting

- 様々なアルゴリズムが存在
- $\boxed{\text{バブルソート}}$
- 挿入ソート
- ヒープソート
- $\boxed{\text{マージソート}}$
- $\boxed{\text{クイックソート}}$
- などなど

最悪計算時間　O(n²)

最悪計算時間　O(n log n)

平均計算時間　O(n log n)

最悪O(n²), 実用的には高速

今日の講義:「配列」を使って実行できる配列のアルゴリズムを紹介

バブルソート
Bubble Sort

（教科書87ページ）

バブルソートの動き(その1)
Behavior of Bubble Sort

A[i] = 配列の i 番目の要素 (i = 1, 2, …, n)

1回目の反復

■A[7]とA[8]の大小を比較

A[7] > A[8]

⇒ 2つの要素を入れ替え

3	2	0	5	8	3	4	1

■A[6]とA[7]の大小を比較

A[6] > A[7]

⇒ 2つの要素を入れ替え

3	2	0	5	8	3	1	4

3	2	0	5	8	1	3	4

バブルソートの動き(その2)

- 以下、同様に繰り返す

3	2	0	5	8	1	3	4

入れ替え

3	2	0	5	1	8	3	4

入れ替え

3	2	0	1	5	8	3	4

そのまま

3	2	0	1	5	8	3	4

入れ替え

3	0	2	1	5	8	3	4

入れ替え

0	3	2	1	5	8	3	4

A[1], …, A[8]
の中で最小

1回目の
反復終了

バブルソートの動き(その3)

2回目の反復

A[2], …,A[8] に対して1回目の反復と同じ作業を行う

0	3	2	1	5	8	3	4

全体で2番目に小さい

A[2], …, A[8] の中で最小

0	1	3	2	3	5	8	4

3回目の反復

A[3], …,A[8] に対して1回目の反復と同じ作業を行う

0	1	3	2	3	5	8	4

全体で3番目に小さい

A[3], …, A[8] の中で最小

0	1	2	3	3	4	5	8

バブルソートの動き（その4）

4回目の反復

0	1	2	3	3	4	5	8

5回目の反復

0	1	2	3	3	4	5	8

6回目の反復

0	1	2	3	3	4	5	8

7回目の反復

0	1	2	3	3	4	5	8

ソート完了！

0	1	2	3	3	4	5	8

バブルソートの計算時間(その1)
Time Complexity of Bubble Sort

- 一回目の反復
  A[n-1]とA[n]の比較、入れ替え
  A[n-2]とA[n-1]の比較、入れ替え
  ⋮
  A[1]とA[2]の比較、入れ替え
  ⇒ c (n-1) 時間 （c は定数）
- ２回目の反復: c (n – 2) 時間
- ３回目の反復: c (n – 3) 時間

バブルソートの計算時間（その2）

- 一般に、k 回目の反復：c（n − k）時間

∴ バブルソートの計算時間は

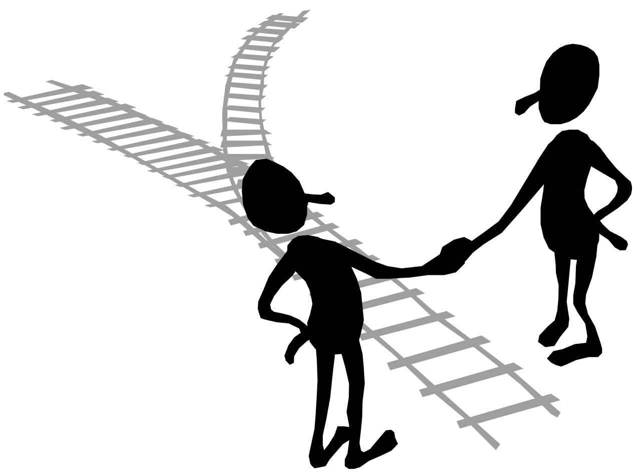
$c \times \{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0\} = c(n-1)(n-2)/2 = O(n^2)$

※途中でソートが終わっていたら
以降の反復を省略できる
（例：4回目の反復以降）

マージソート

Merge Sort

（教科書120ページ）



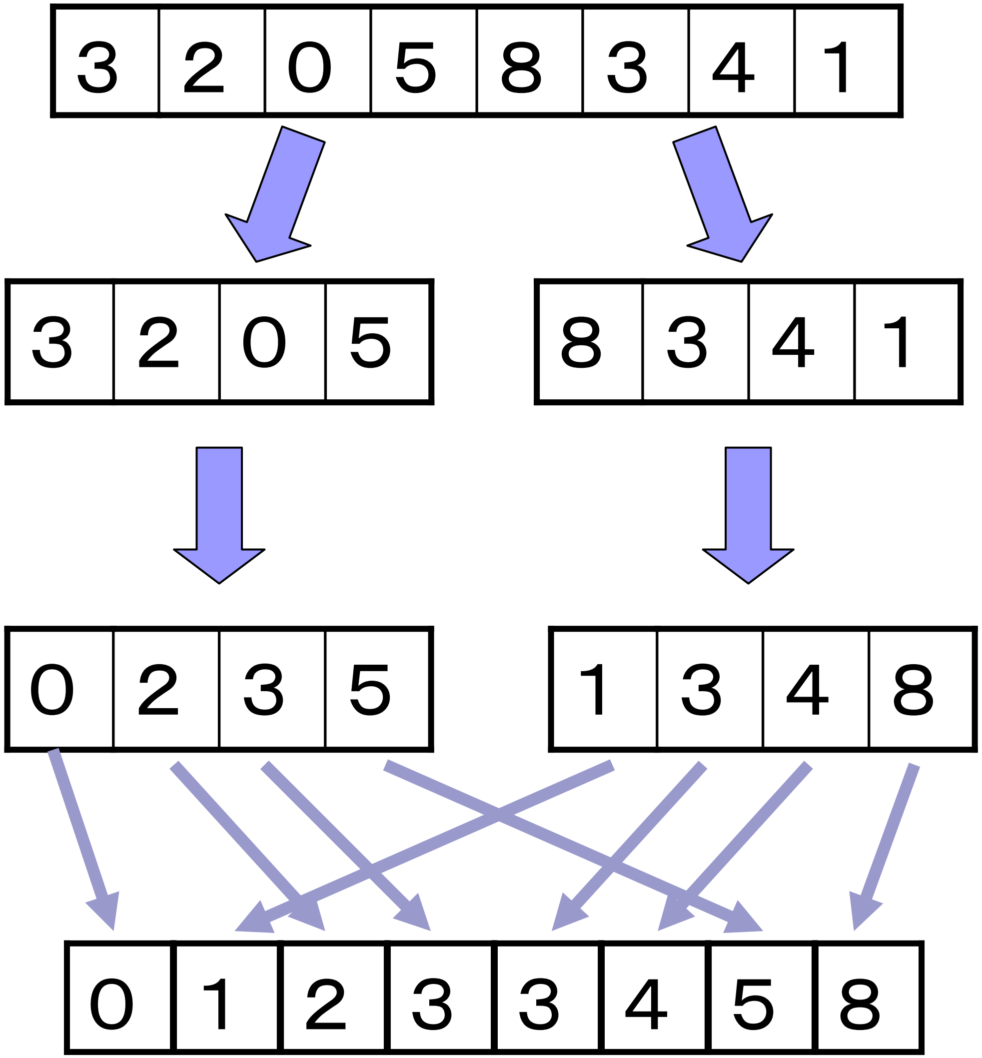
マージソートのアイディア
Idea of Merge Sort

- アイディア: 分割統治法
(divide-and-conquer method)

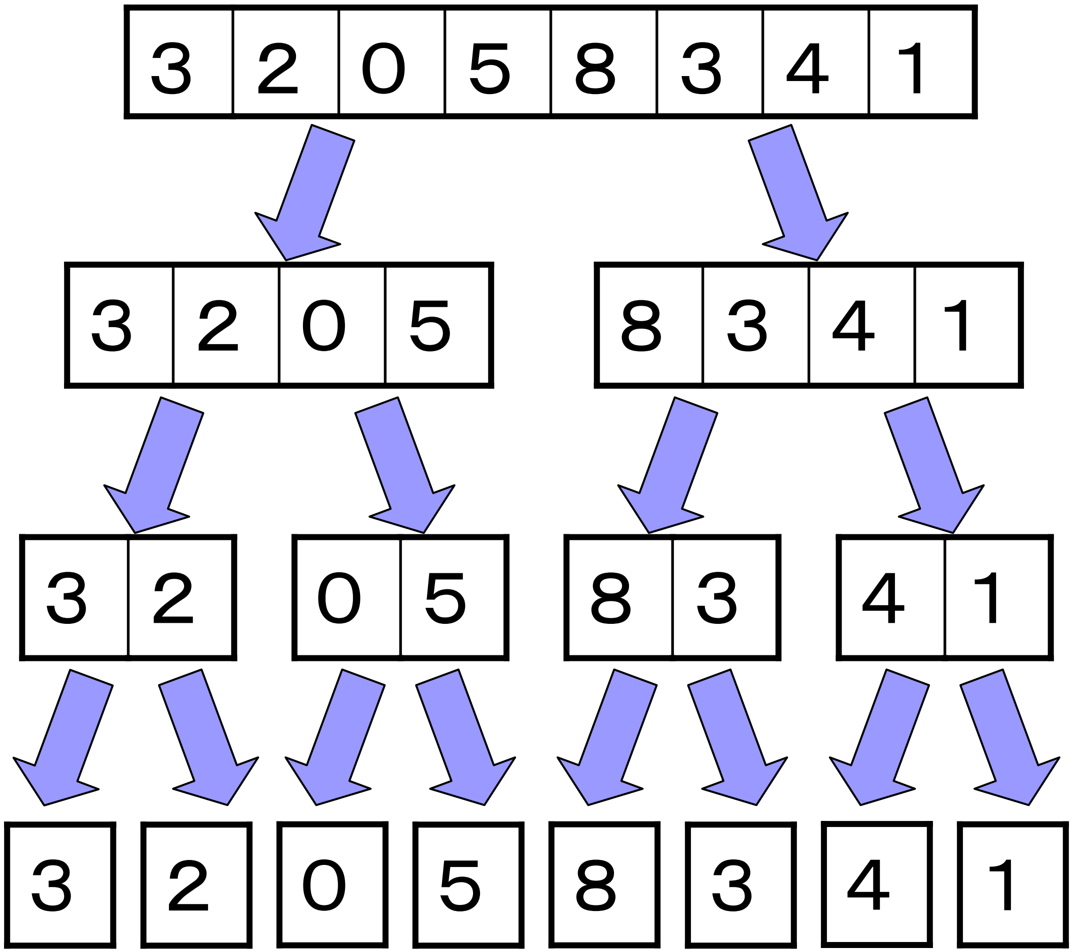
①与えられた配列を2分割

②2分割された配列をそれぞれ再帰的にソート

③ソートされた2つの配列をマージ（統治）



マージソートの動き(前半)
Behavior of Merge Sort

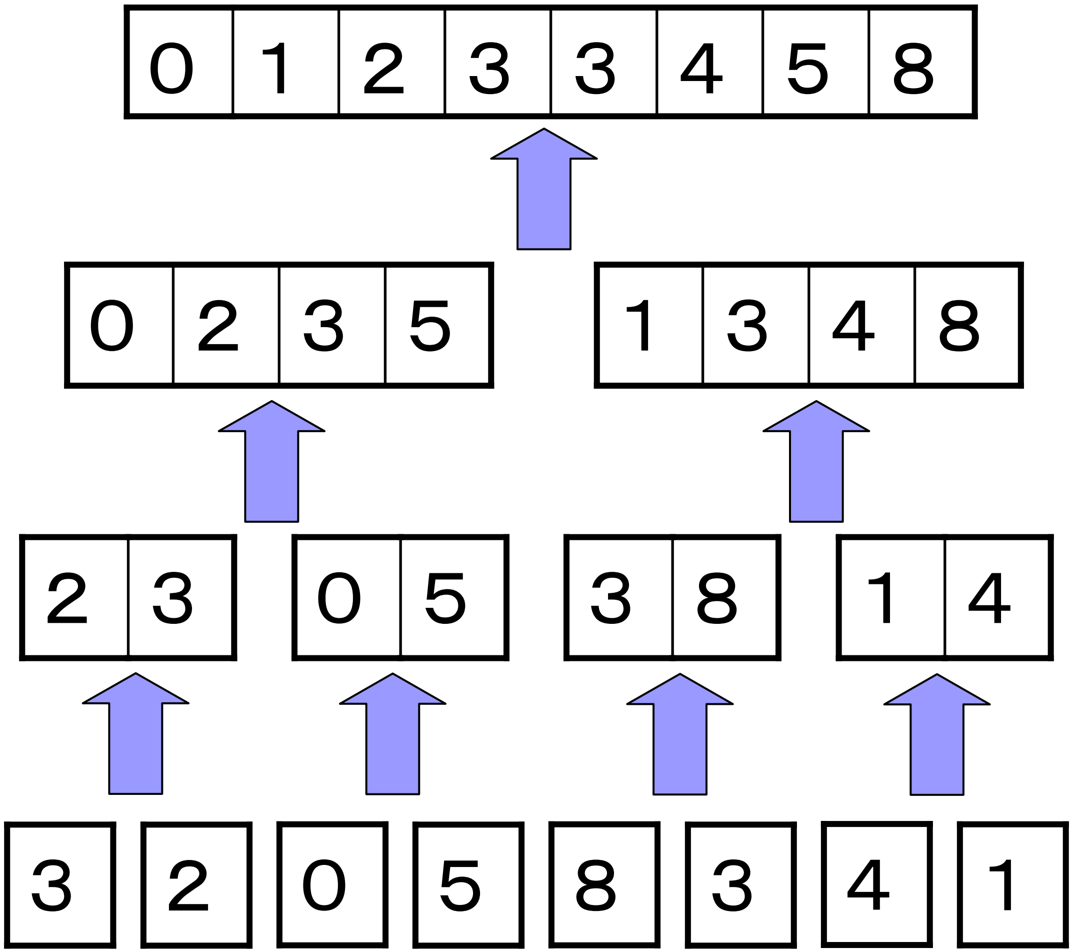


配列を2分割
(大きさ:8→4)

配列を2分割
(大きさ:4→2)

配列を2分割
(大きさ:2→1)

マージソートの動き（後半）



ソート列をマージ
（大きさ：4→8）

ソート列をマージ
（大きさ：2→4）

ソート列をマージ
（大きさ：1→2）

ソート列のマージ(その1)
Merge of Sorted Sequences

ソート列の併合(マージ)は線形時間で出来る

A_1

0	2	3	5

A_2

1	3	4	8

B

マージした結果を格納する配列Bを用意

A_1

0	2	3	5

A_2

1	3	4	8

$0 < 1$

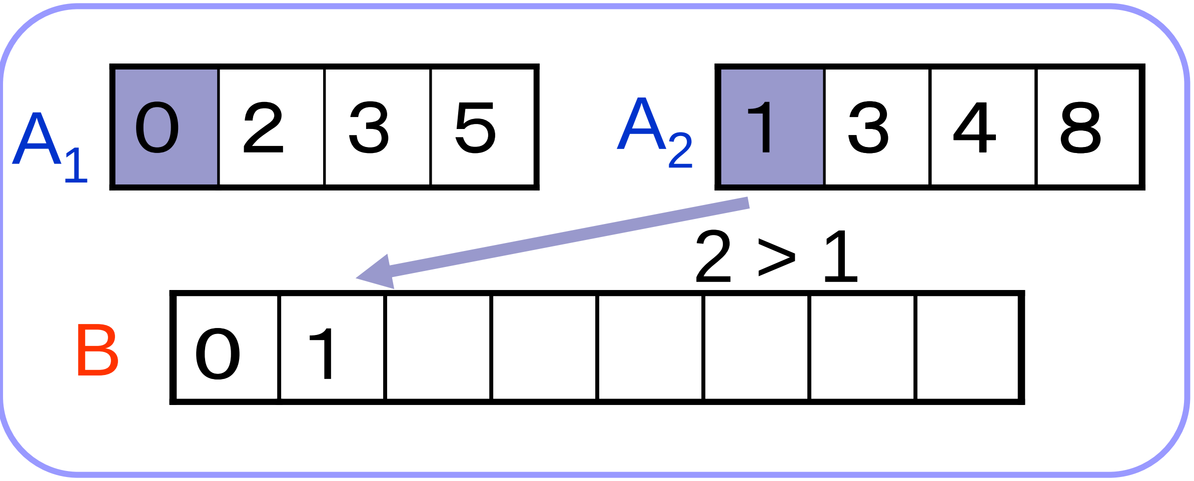
B

0							

A_1 と A_2 の先頭の数字を比較

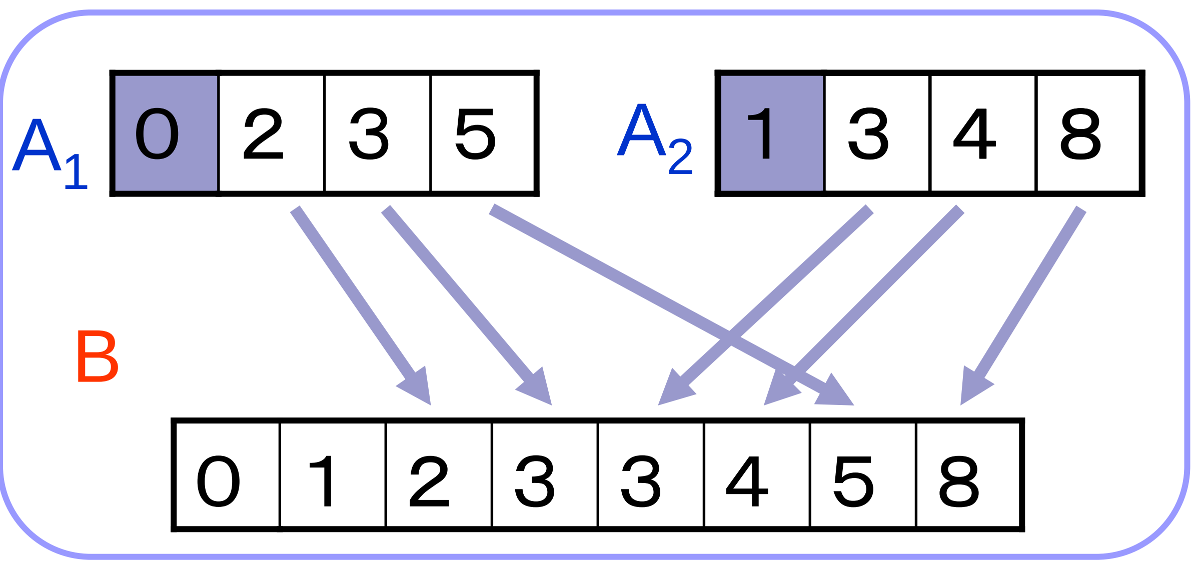
小さいほうを B の空欄の先頭へ移動

ソート列のマージ(その2)



A_1 と A_2 の先頭の数字を比較

小さいほうを B の空欄の先頭へ移動



この作業を繰り返す

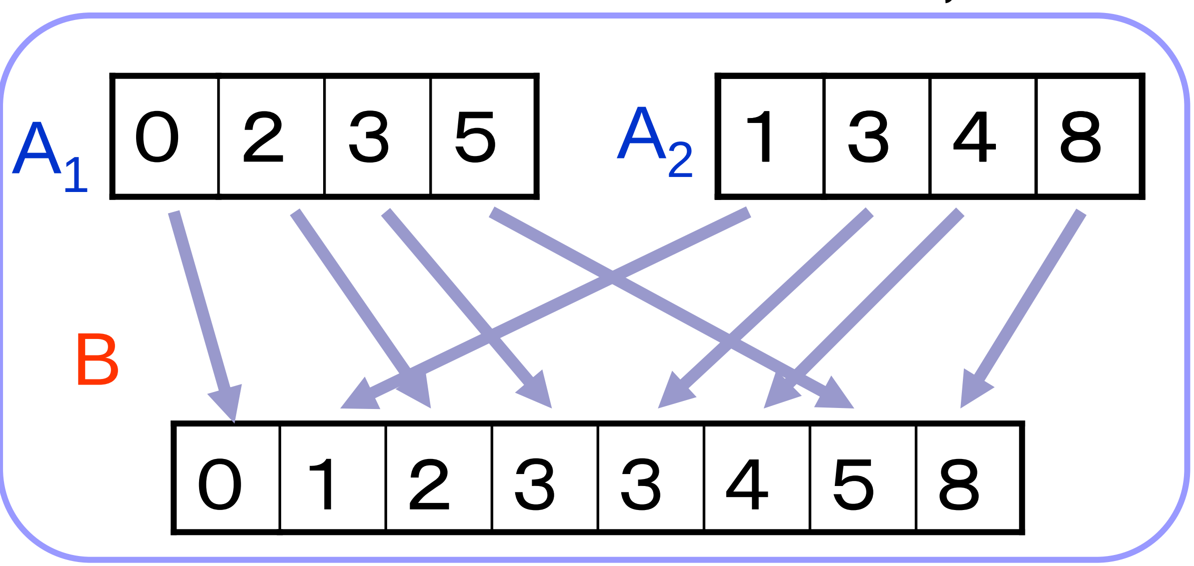
ソート列のマージ(その3)

計算時間の解析

$n_1 = A_1$ の要素数、$n_2 = A_2$ の要素数

A_1 と A_2 の要素ひとつひとつに対して、

他の要素との比較
B に要素を書き込む
} 定数時間 c



$c\,(n_1+n_2)$ 時間で実行可能

マージソートの計算時間(その1)
Time Complexity of Merge Sort

T(n) = n 個の要素のソートの時間(n は2のべき乗と仮定)

①与えられた配列を2分割

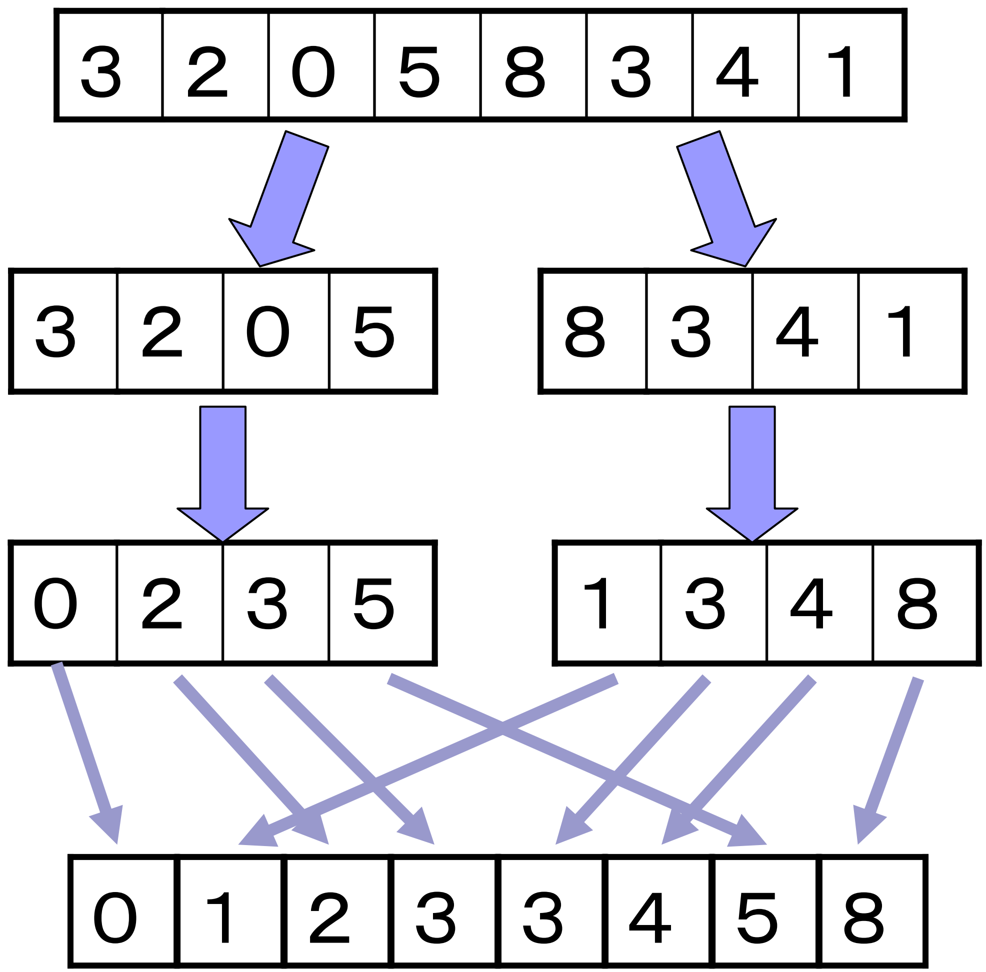
c’ n 時間

②2分割された配列をそれぞれ再帰的ソート

T(n/2) × 2　時間

③ソートされた2つの配列をマージ　(統治)

c n 時間



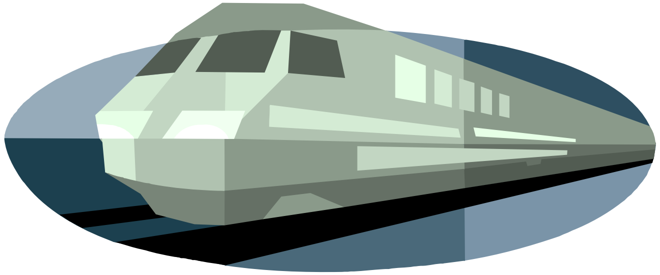
マージソートの計算時間（その2）

$T(n)$ = n 個の要素のソートの時間

$T(n) = 2\,T(n/2) + (c+c')\,n$　が成り立つ

⇒ 解は $T(n) = (c+c')\,n \log_2 n = O(n \log n)$

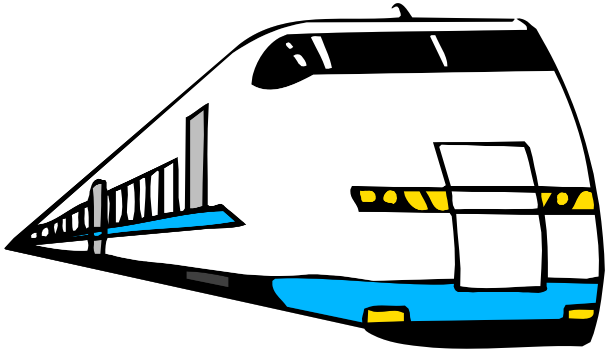
※ n が2のべき乗でないときも，解析を少し修正すれば $O(n \log n)$ の時間計算量が証明できる



クイックソート

Quick Sort

（教科書96ページ）



クイックソートのアイディア
Idea of Quick Sort

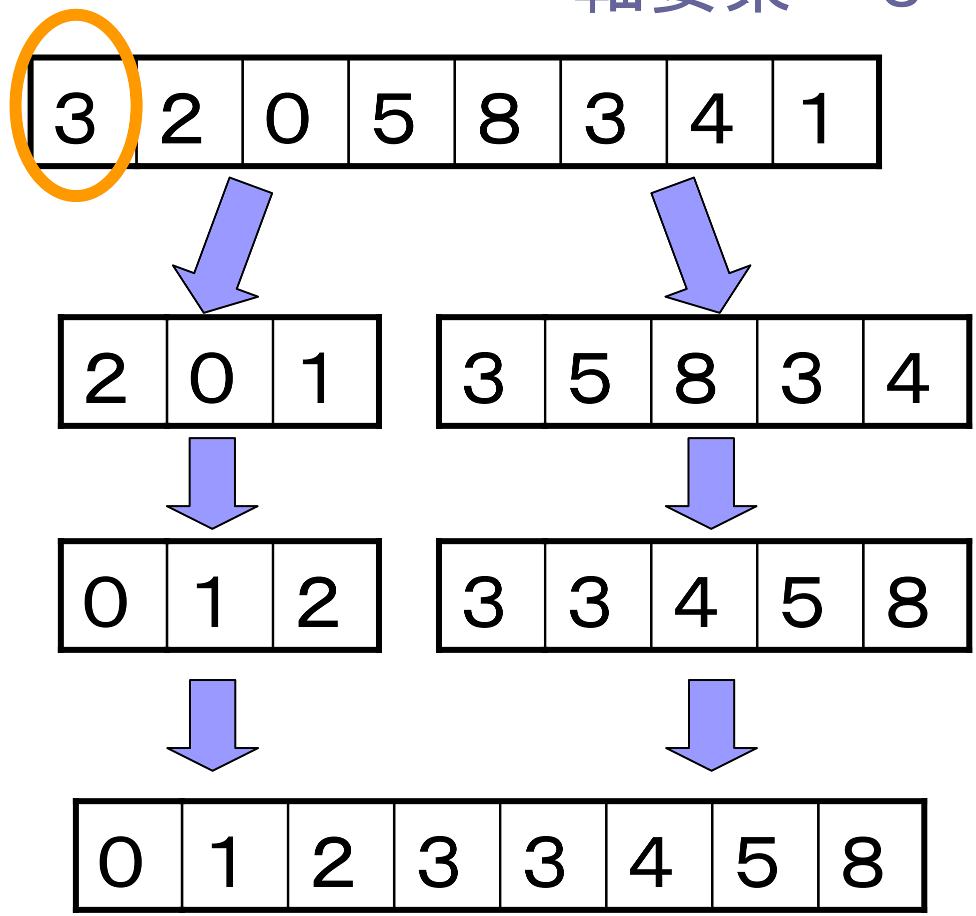
①A[1], …, A[n]から
ひとつの値（軸要素, pivot）
を選ぶ

② 軸要素未満の要素と
それ以外に分割

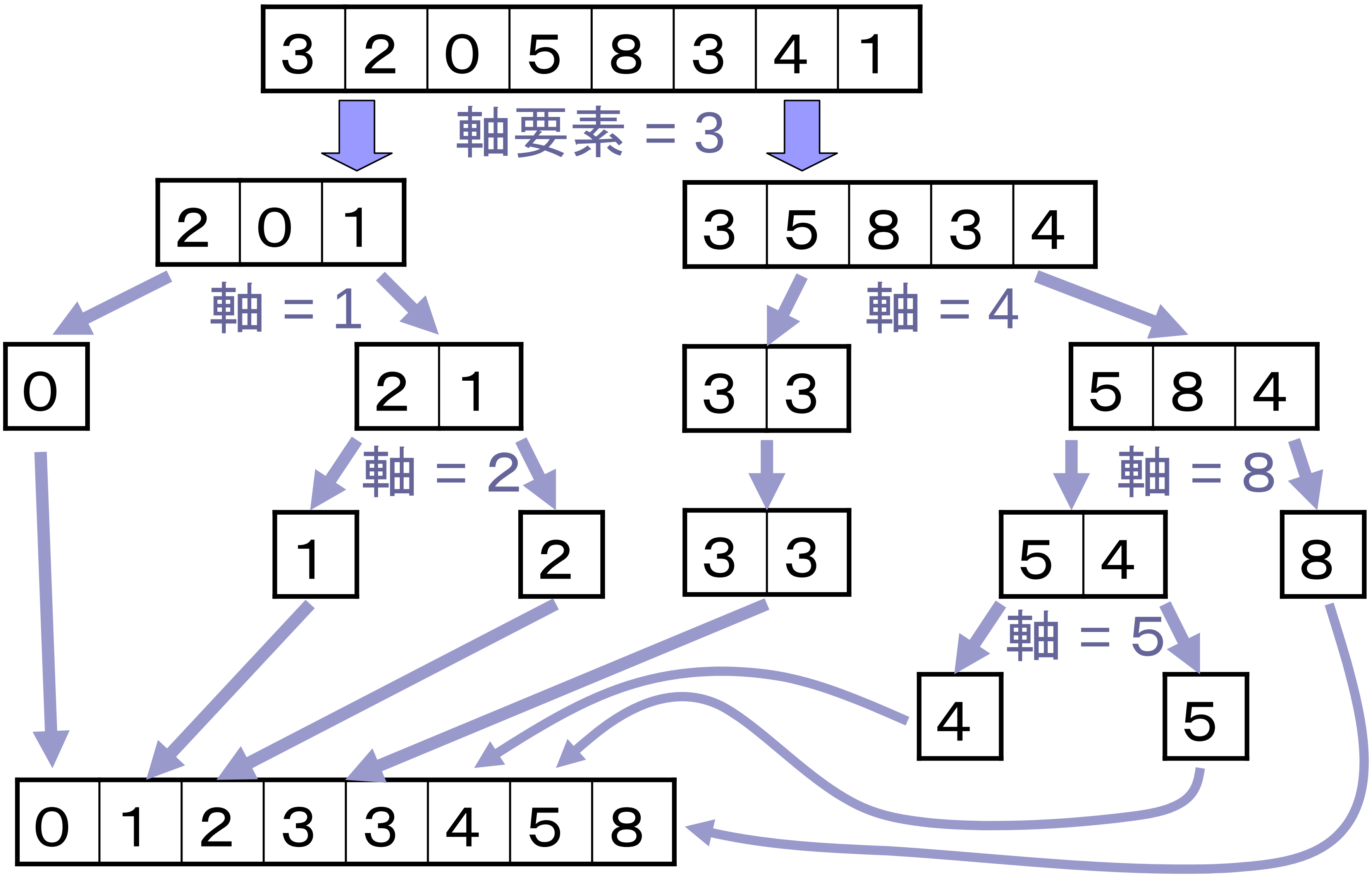
③2分割された配列を
それぞれ再帰的にソート

④ソートされた2つの配列
をつなげる

軸要素 = 3



クイックソートの動き Behavior of Quick Sort

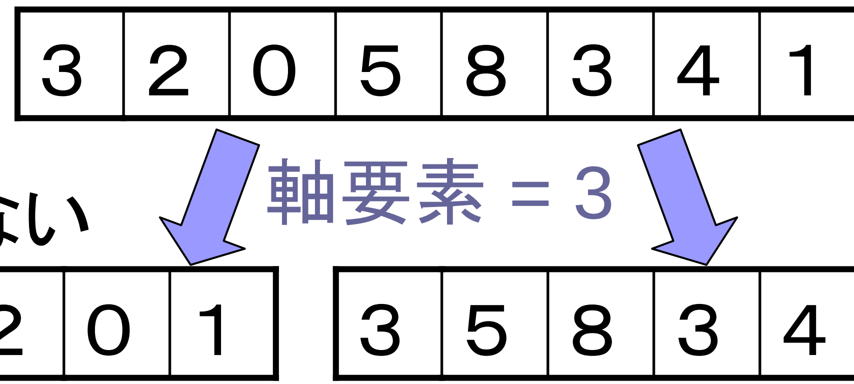


軸要素の選び方（その1）
How to Choose Pivot

良い選び方：

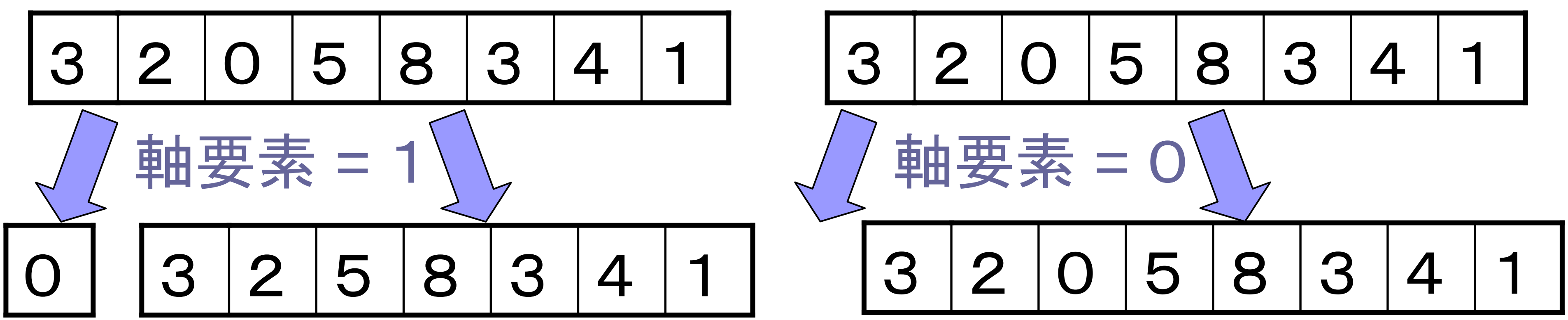
配列をほぼ二等分する

軸要素の選択に時間をかけない



悪い選び方：

２分された配列の大きさがアンバランス

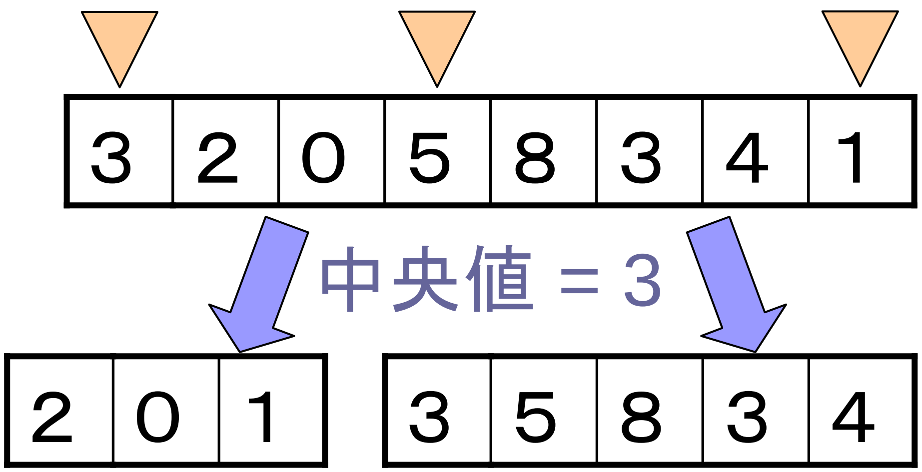


軸要素の選び方（その2）

よく使われる選び方：

（a）ランダムにひとつ選ぶ

（b）左端、右端、真中の3要素の中央値



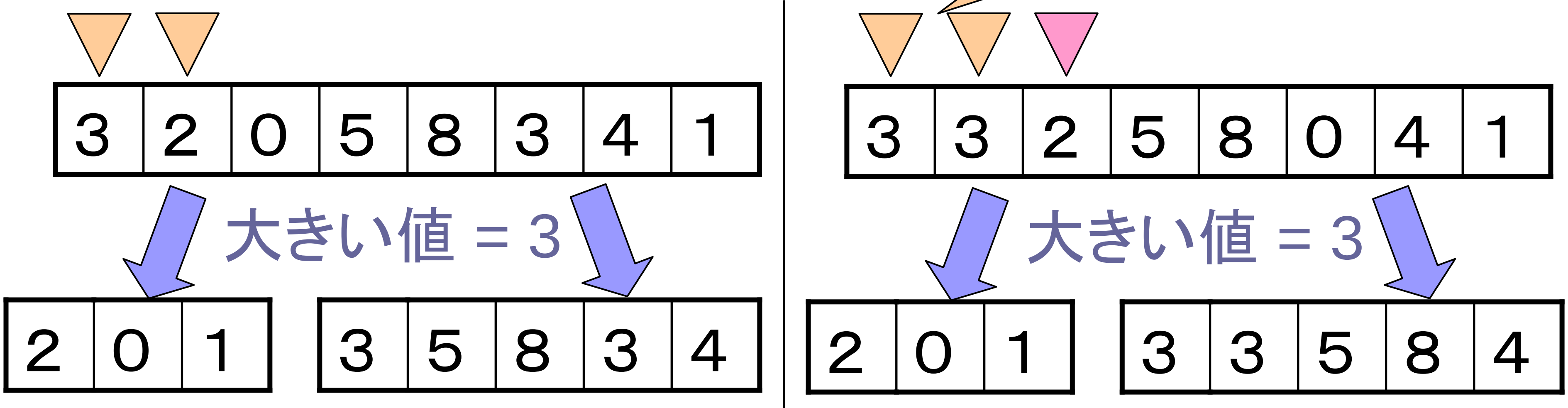
軸要素の選び方(その3)

よく使われる選び方:

(c)A[1], A[2]のうち、大きい値

同じ場合は次の異なる値と比較

A[1]=A[2]
⇒A[3]と比較



クイックソートの計算時間

T(n) = n 個の要素のソートの計算時間

一般の場合: k 個と n – k 個に分割される $(1 < k < n)$

⇒　$T(n) \leqq T(k) + T(n-k) + c\,n$　（c: 定数）

⇒　帰納法により、解は　$T(n) \leqq 2c\,n^2$

　∴最悪計算時間は　$O(n^2)$

実際には，数列がほぼ半分に分割される

⇒ 実用上の計算時間は$O(n \log n)$ に近い

平均時間も　$O(n \log n)$　（解析はちょっと難しい）

演習問題

- 次の数値に対して，
  バブルソート，マージソート，クイックソート

を適用した場合の挙動を（講義で行なった程度に）

詳しく説明せよ．

27, 17, 3, 16, 13, 10, 1, 5