第2回講義の補足資料

平成21年4月23日

1　マージソートの再帰のレベルの総数が $O(\log n)$ になることの証明

n 個の実数に対するマージソートの再帰のレベルの総数を $L(n)$ と書くことにする。

1.1　n が2のべき乗の場合

n は2のべき乗であると仮定する。マージソートでは、与えられた n 個の実数を最初に $n/2$ 個の2つの集合に分割する。このことから、次の漸化式が成り立つ。

$$L(n) = \begin{cases} 1 & (n = 1), \\ L(n/2) + 1 & (n \geq 2). \end{cases}$$

このとき、

$$L(n) = \log_2 n + 1$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明する。

[(i) $n = 1$ の場合]　$n = 1$ のとき、$L(n) = L(1) = 1$, $\log_2 n + 1 = \log_2 1 + 1 = 1$ より、$L(n) = \log_2 n + 1$ が成立する。

[(ii) $n \geq 2$ の場合]　n より小さい任意の n' (ただし、n' は2のべき乗) に対して $L(n') = \log_2 n' + 1$ が成り立つと仮定し、$L(n) = \log_2 n + 1$ を証明する。

帰納法の仮定により、$L(n/2) = \log_2(n/2) + 1 = \log_2 n$ が成り立つ。これを上記の漸化式に代入すると、$L(n) = L(n/2) + 1 = \log_2 n + 1$ となり、証明された。

1.2　n が一般の整数の場合

マージソートでは、与えられた n 個の実数を最初に $\lceil n/2 \rceil$ 個の集合と $\lfloor n/2 \rfloor$ 個の集合に分割する。このことと不等式 $L(\lceil n/2 \rceil) \geq L(\lfloor n/2 \rfloor)$ より、次の漸化式が成り立つ。

$$L(n) = \begin{cases} 1 & (n = 1), \\ L(\lceil n/2 \rceil) + 1 & (n \geq 2). \end{cases}$$

このとき、

$$L(n) = \lceil \log_2 n \rceil + 1$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明する。なお、n が2のべき乗のときは $\log_2 n$ は整数であり、上記の不等式の右辺は $\log_2 n + 1$ となることに注意したい。

[(i) $n=1$ の場合]　$n=1$ のとき、$L(n)=L(1)=1$, $\lceil\log_2 n\rceil+1=\lceil\log_2 1\rceil+1=1$ より、$L(n)=\lceil\log_2 n\rceil+1$ が成立する。

[(ii) $n\geq 2$ の場合]　n より小さい任意の n' に対して $L(n')=\lceil\log_2 n'\rceil+1$ が成り立つと仮定し、

$$L(n)=\lceil\log_2 n\rceil+1$$

を証明する。なお、$k=\lceil\log_2 n\rceil$ とおくと、証明すべき等式は

$$L(n)=k+1 \tag{1}$$

となり、また k は $2^{k-1}<n\leq 2^k$ を満たすことに注意する。

帰納法の仮定により、

$$L(n)=L(\lceil n/2\rceil)+1=\lceil\log_2(\lceil n/2\rceil)\rceil+2$$

が成り立つ。したがって、(1) を証明するためには、

$$\lceil\log_2(\lceil n/2\rceil)\rceil=k-1 \tag{2}$$

が成り立つことを証明すれば良い。

$2^{k-1}<n\leq 2^k$ より、$2^{k-2}<n/2\leq 2^{k-1}$ が成り立つ。$\lceil n/2\rceil$ は $n/2$ 以上の整数の中でもっとも小さいものを表すので、$2^{k-2}<\lceil n/2\rceil\leq 2^{k-1}$ が成り立つ。したがって、

$$k-2=\log_2 2^{k-2}<\log_2(\lceil n/2\rceil)\leq\log_2 2^{k-1}=k-1$$

が導かれる。この不等式より、$\lceil\log_2(\lceil n/2\rceil)\rceil=k-1$ が成り立つ。よって (2) が証明された。

2　マージソートの時間計算量が $O(n\log n)$ であることの証明

n 個の実数に対するマージソートの計算時間を $T(n)$ と書くことにする。

2.1　n が 2 のべき乗の場合

n は 2 のべき乗であると仮定する。マージソートでは、与えられた n 個の実数を最初に $n/2$ 個の 2 つの集合に分割し、再帰的にソートした後に 2 つのソート列をマージする。2 つの集合に分割する際に必要な時間を cn、マージに必要な時間を $c'n$ とおくと、次の漸化式が成り立つ。

$$T(n)=\begin{cases} c'' & (n=1), \\ 2T(n/2)+(c+c')n & (n\geq 2). \end{cases}$$

ここで、c'' は正の定数である。このとき、$C=\max\{c+c',c''\}$ とおくと、

$$T(n)\leq Cn(\log_2 n+1) \tag{3}$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明する。

[(i) $n=1$ の場合]　上記の漸化式より、$T(n)=T(1)=c''$ が成り立つ。また、$Cn(\log_2 n+1)=C\cdot 1\cdot(\log_2 1+1)=C\geq c''$ であるので、$T(n)\leq Cn(\log_2 n+1)$ が成り立つ。

[(ii) $n \geq 2$ の場合]　n より小さい任意の n' (ただし、n' は 2 のべき乗) に対して $T(n') \leq Cn'(\log_2 n' + 1)$ が成り立つと仮定し、$T(n) \leq Cn(\log_2 n + 1)$ を証明する。

漸化式より、$T(n) = 2T(n/2) + (c + c')n \leq 2T(n/2) + Cn$ が成り立つ。帰納法の仮定より、$T(n/2) \leq C(n/2)(\log_2(n/2) + 1) = (C/2)n \log_2 n$ が成り立つ。よって、

$$T(n) \leq 2T(n/2) + Cn \leq Cn \log_2 n + Cn = Cn(\log_2 n + 1)$$

となり、不等式 (3) が示された。

2.2　n が一般の整数の場合

マージソートでは、与えられた n 個の実数を最初に $\lceil n/2 \rceil$ 個の集合と $\lfloor n/2 \rfloor$ 個の集合に分割し、再帰的にソートした後に 2 つのソート列をマージする。2 つの集合に分割する際に必要な時間を $c(\lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor) = cn$、マージに必要な時間を $c'(\lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor) = c'n$ とおくと、次の漸化式が成り立つ。

$$T(n) = \begin{cases} c'' & (n = 1), \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + (c + c')n & (n \geq 2). \end{cases}$$

ここで、c'' は正の定数である。このとき、$C = \max\{c + c', c''\}$ とおくと、

$$T(n) \leq Cn(\lceil \log_2 n \rceil + 1) \tag{4}$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明する。

[(i) $n = 1$ の場合]　上記の漸化式より、$T(n) = T(1) = c''$ が成り立つ。また、$Cn(\lceil \log_2 n \rceil + 1) = C1(\lceil \log_2 1 \rceil + 1) = C \geq c''$ であるので、$T(n) \leq Cn(\lceil \log_2 n \rceil + 1)$ が成り立つ。

[(ii) $n \geq 2$ の場合]　n より小さい任意の n' に対して $T(n') \leq Cn'(\lceil \log_2 n' \rceil + 1)$ が成り立つと仮定し、$T(n) \leq Cn(\lceil \log_2 n \rceil + 1)$ を証明する。なお、$k = \lceil \log_2 n \rceil$ とおくと、証明すべき不等式は

$$T(n) \leq Cn(k + 1) \tag{5}$$

となり、また k は $2^{k-1} < n \leq 2^k$ を満たすことに注意する。

漸化式より、

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + (c + c')n \leq T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + Cn$$

が成り立つ。また、$n \geq 2$ より $\lfloor n/2 \rfloor \leq \lceil n/2 \rceil < n$ が成り立つので、帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} T(\lceil n/2 \rceil) &\leq C\lceil n/2 \rceil \cdot (\lceil \log_2(\lceil n/2 \rceil) \rceil + 1), \\ T(\lfloor n/2 \rfloor) &\leq C\lfloor n/2 \rfloor \cdot (\lceil \log_2(\lfloor n/2 \rfloor) \rceil + 1), \end{aligned}$$

が導かれる。よって、

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + Cn \\ &\leq C\lceil n/2 \rceil \cdot (\lceil \log_2(\lceil n/2 \rceil) \rceil + 1) + C\lfloor n/2 \rfloor \cdot (\lceil \log_2(\lfloor n/2 \rfloor) \rceil + 1) + Cn \end{aligned}$$

となる。第 1.2 節での証明と同じ証明により、$\lceil \log_2(\lceil n/2 \rceil) \rceil = k-1$ を導くことができる。また、同様の証明により、$\lceil \log_2(\lceil n/2 \rceil) \rceil \leq k-1$ を導くことができる。よって、

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq C\lceil n/2 \rceil \cdot (\lceil \log_2(\lceil n/2 \rceil) \rceil + 1) + C\lfloor n/2 \rfloor \cdot (\lceil \log_2(\lfloor n/2 \rfloor) \rceil + 1) + Cn \\
&\leq C\lceil n/2 \rceil \cdot k + C\lfloor n/2 \rfloor \cdot k + Cn \\
&= C(\lceil n/2 \rceil \cdot k + \lfloor n/2 \rfloor \cdot k + n) \\
&= C(nk+n) \ = \ Cn(k+1)
\end{aligned}
$$

が得られ、(5) が証明された。