最小費用テンション問題に対する算法と画像処理への応用

Vladimir Kolmogorov (University College London)
塩浦 昭義（東北大学）

最小費用テンション問題

最小化: $g(p) = \sum_{u \in V} \varphi_u(p_u) + \sum_{(u,v) \in E} \psi_{uv}(p_v - p_u)$

条件: $a_u \leq p_u \leq b_u \ (u \in V)$

$a_{uv} \leq p_v - p_u \leq b_{uv} \ ((u,v) \in E)$

$p \in \mathbb{Z}^V$

$G = (V, E)$:有向グラフ

$\varphi_u, \psi_{uv} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, 凸関数

a_u, b_u, a_{uv}, b_{uv}: 整数

- 凸費用をもつ最小費用フロー問題の双対問題
  - Iri (1969), Rockafellar (1984)

本研究の目的

- 最小費用テンション問題に対する効率的な主算法の提案
  - 擬多項式時間アルゴリズム

離散凸解析の成果を利用

- 主算法の改良➔主双対算法の提案
  - 実計算時間の短縮
- 提案した算法のパノラマイメージ接合問題への適用

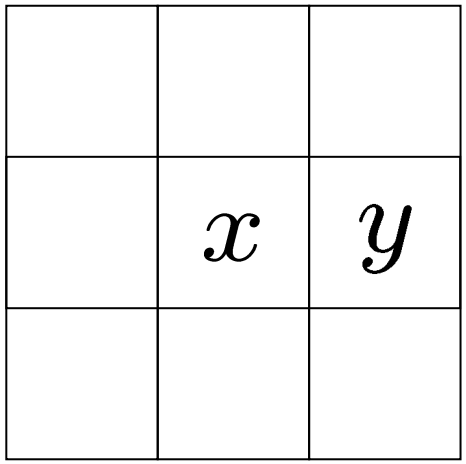
パノラマイメージの接合

入力画像1　　入力画像2

出力画像

Levin et al. (2004) の手法

- 基本となるアイディア
  - 隣接するピクセルの明度（輝度）の差分に注目
  - 出力画像での差分値を，入力画像での差分値にできるだけ近づける



x, y: 隣接するピクセル

$$\left.\begin{array}{l} |(p_y - p_x) - (I_y^1 - I_x^1)| \\ |(p_y - p_x) - (I_y^2 - I_x^2)| \end{array}\right\} \text{最小化}$$

p_x: 出力画像のピクセル x での明度

I_x^k: 入力画像 k のピクセル x での明度

Levin et al. (2004) の手法

- 基本となるアイディア
  - 隣接するピクセルの明度（輝度）の差分に注目
  - 出力画像での差分値を，入力画像での差分値にできるだけ近づける

最小化: $$\sum_{(x,y)} w^1_{xy}|(p_y - p_x) - (I^1_y - I^1_x)| + \sum_{(x,y)} w^2_{xy}|(p_y - p_x) - (I^2_y - I^2_x)|$$

条件: $0 \leq p_x \leq 256$

p_x: 出力画像のピクセル x での明度

I^k_x: 入力画像 k のピクセル x での明度

最小費用テンション問題

既存のアルゴリズム

- 最小カット問題への帰着 [石川03], [Ahuja et al.04]
  - $\varphi_u(\cdot)$ が凸関数でなくても適用可
  - 枝数 (β mK)
- 線形費用ネットワークフローへの帰着
  - 枝数 O(β m)
- 主算法 [室田00, Bioucas-Dias & Valadão05]
  - 主変数を greedy なやり方で更新
  - 繰り返し最小カット問題を解く
- 主双対算法 [Karzanov et al. 97], 双対算法 [Ahuja et al. 03]
  - 双対なネットワークフロー問題を利用
  - 双対変数(フロー)を更新
  - Ahuja et al. のO(n m log (n^2/m) log(nK))はこの問題に対し最速

n: 頂点数, m: 枝数
$K = \max\{b_u - a_u\}$
β: 関数 φ_u, φ_{uv} の折れ線の総数

本研究で得られた結果

- 新たな主算法の提案
  - 室田00の主算法の（わずかに）一般化
  - L凸関数最小化にも適用可
- 主算法の反復回数に対する理論的解析
  - 反復回数 O(K)（＋スケーリングで O(n log K)）
  - 室田03による解析結果O(nK)を改善
- 主算法から主双対算法への改良
  - 双対変数の利用により（実用的面での）高速化
  - パノラマイメージ接合問題に対し高速な算法

提案する主算法

- 手続き **UP** もしくは **DOWN** により解 p を繰り返し更新
- 手続き **UP**
  - $p_{\mathrm{u}} \in \arg\min\{g(p') \mid p \leq p' \leq p + \mathbf{1},\ p'$は許容解$\}$ を計算
  - $g(p_{\mathrm{u}}) < g(p)$ ならば $p := p_{\mathrm{u}}$
- 手続き **DOWN**
  - $p_{\mathrm{d}} \in \arg\min\{g(p') \mid p - \mathbf{1} \leq p' \leq p,\ p'$は許容解$\}$ を計算
  - $g(p_{\mathrm{d}}) < g(p)$ ならば $p := p_{\mathrm{d}}$
- 手続き **UP**, **DOWN** により解が不変

  ➔終了，現在の p が最適

提案する主算法

- 手続き **UP** もしくは **DOWN** の実行方法
  - 人工グラフの最小 s-t カット問題に帰着可能
  - 枝の重み＝関数 φu または φuv の勾配
  - O(n m log (n^2/m)) 時間で実行できる

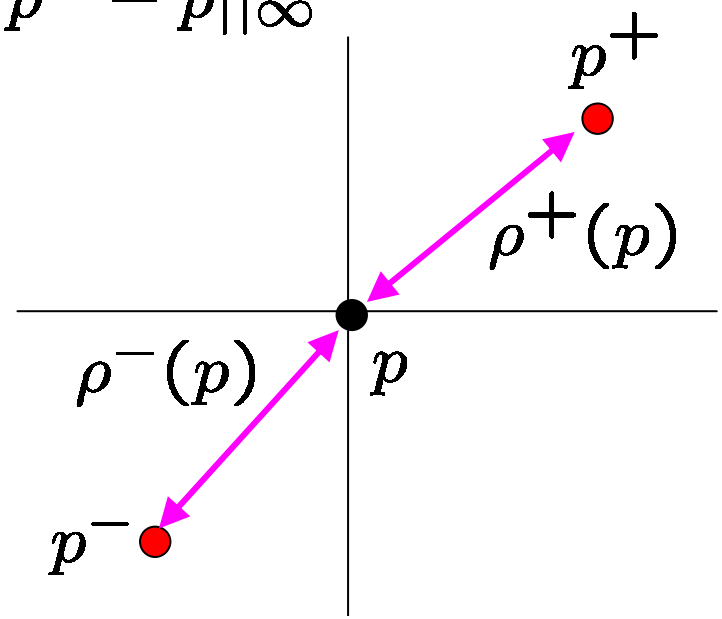
反復回数の解析

- （条件付き）最適解と現在の解の距離を利用

p^+: $\min\{g(p') \mid p' \geq p,\ p$は許容解$\}$ の極小な最適解

p^-: $\min\{g(p') \mid p' \leq p,\ p$は許容解$\}$ の極大な最適解

$$\rho^+(p) = ||p^+ - p||_\infty,\ \rho^-(p) = ||p^- - p||_\infty$$

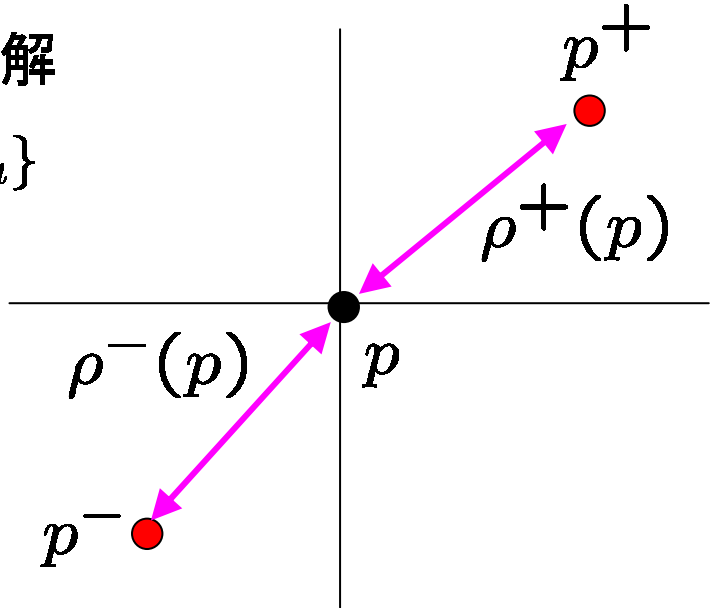


反復回数の解析

- （条件付き）最適解と現在の解の距離を利用
- 手続き UP を実行

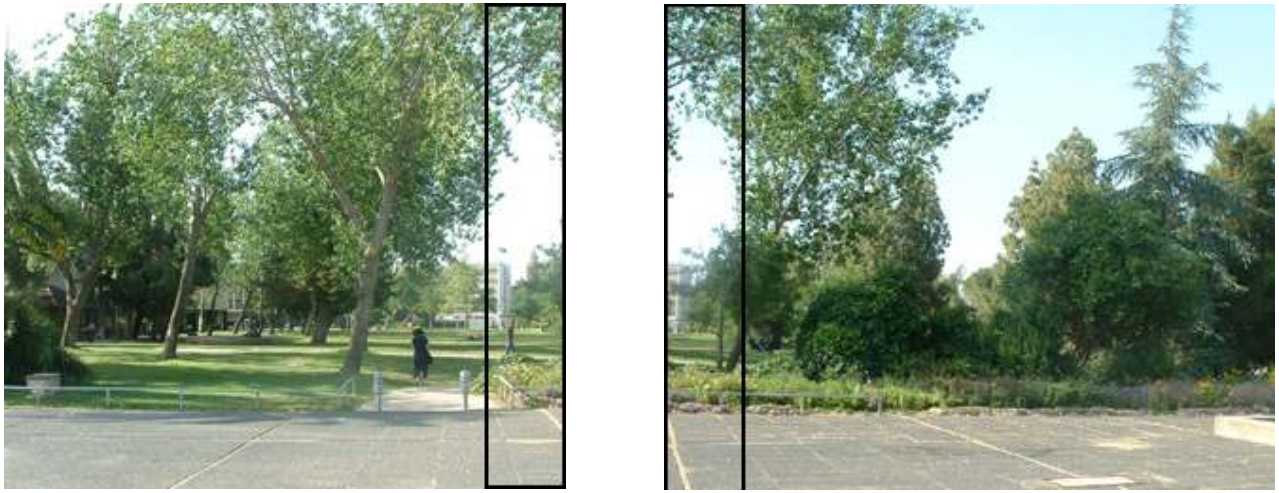
  ➔ $\rho^+(p)$ は１減少，$\rho^-(p)$ は非増加
- 手続き DOWN を実行

  ➔ $\rho^+(p)$ は非増加，$\rho^-(p)$ は１減少
- $\rho^+(p) = \rho^-(p) = 0 \Longrightarrow p$：最適解
- $0 \leq \rho^+(p), \rho^-(p) \leq K \equiv \max\{b_u - a_u\}$



提案する主算法の反復回数は
K 以下

実験結果



input pair

minimal
optimal configuration

average

maximal
optimal configuration

実験結果

input pair

minimal
optimal configuration

average

maximal
optimal configuration

実験結果

input pair

minimal
optimal configuration

average

maximal
optimal configuration