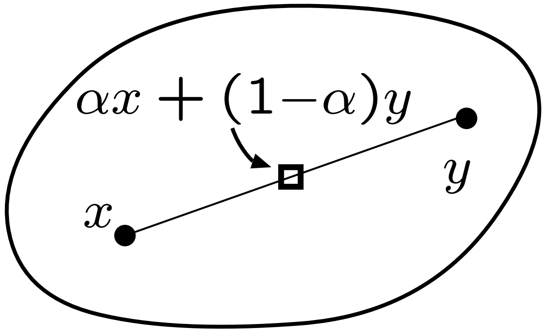
○●○●　講義の概要　●○●○

- 様々な離散凸性の提案
  - 離散凸 (Miller 1971),
  - 整凸 (Favati–Tardella 1990),
  - M 凸/L 凸 (室田 1996, 1998), などなど

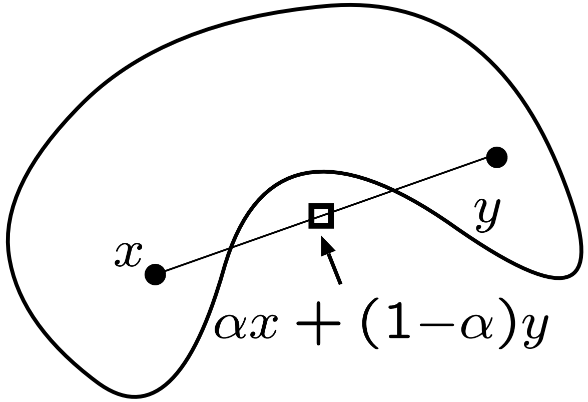
これらは「離散凸性」としてふさわしい概念か?

- **話の流れ**
  - 凸集合と凸関数の性質
  - 離散凸性はどのような性質を満たすべきか?
  - 既存の離散凸性の紹介

集合 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ は**凸集合** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in S,\ 0 \leq \forall\alpha \leq 1\colon\ \alpha x + (1-\alpha)y \in S$



凸集合



非凸集合

扱う関数は $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ の形

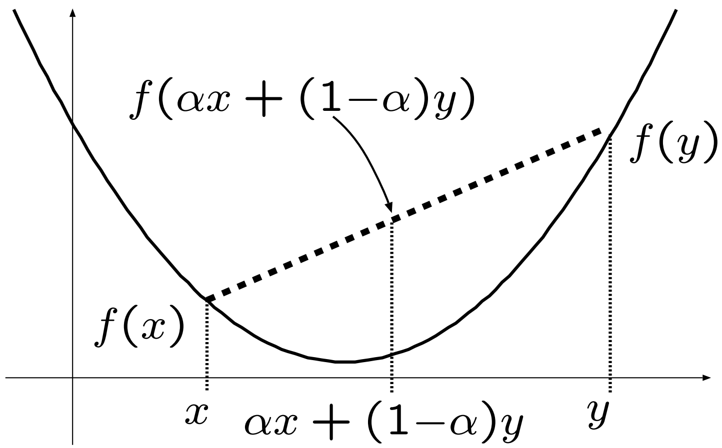
例 — f: 区間 $[0,5]$ 上で定義された関数, $f(x) = x^2 + 3$

$$\Longrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & (x \in [0,5]) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

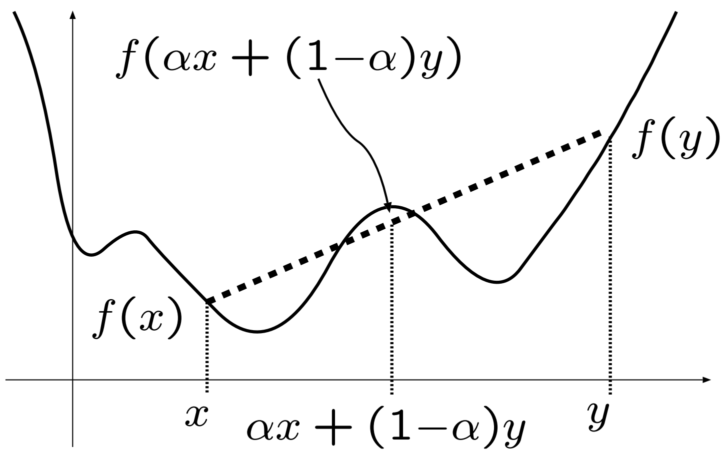
(実効) 定義域 $\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$

関数 f は**凸関数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f$, $0 \leq \forall \alpha \leq 1$:

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$



凸関数



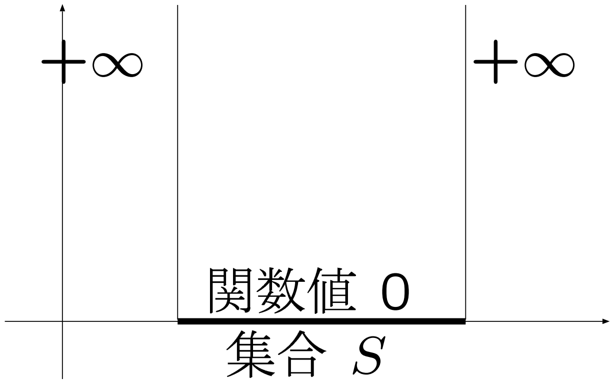
非凸関数

- 凸集合と凸関数の関係

性質 1: 集合 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ は凸集合
$\iff$ S の**標示関数** $\delta_S : \mathbf{R}^n \to \{0, +\infty\}$

$$\delta_S(x) = \begin{cases} 0 & (x \in S) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

は凸関数

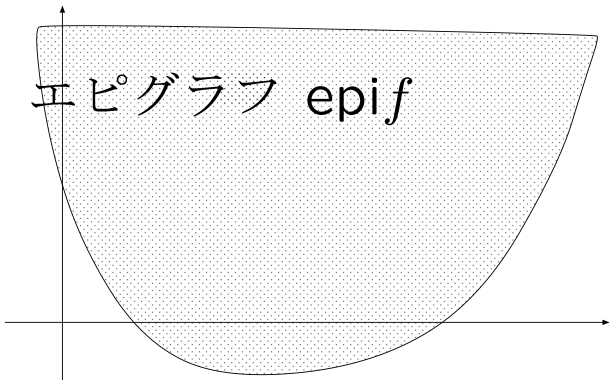


$\therefore$ 凸集合は凸関数の特殊ケース

性質 2: 関数 f は凸関数
$\iff$ f の**エピグラフ**

$$\mathrm{epi} f = \{(x, \alpha) \mid x \in \mathbf{R}^n, \alpha \in \mathbf{R}, f(x) \leq \alpha\}$$

は凸集合

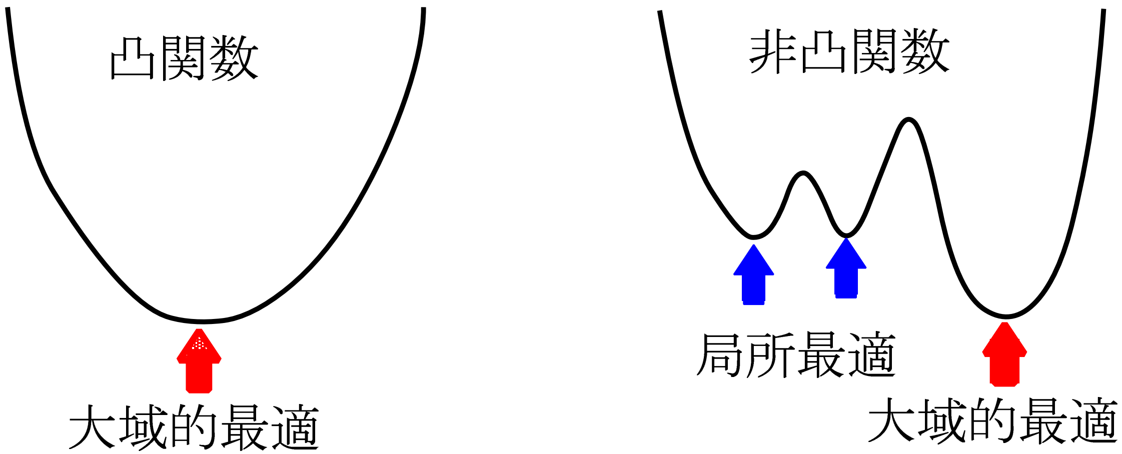


○●○●　凸関数の性質 (その1)　●○●○

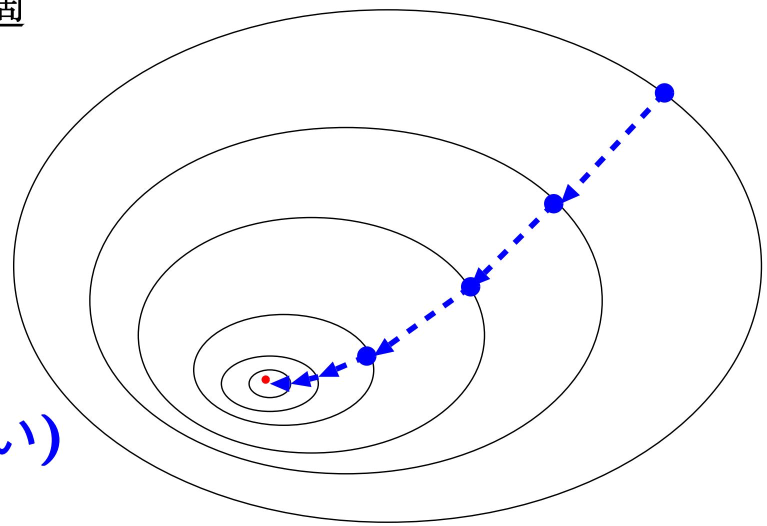
定理 1 [局所最小 ＝ 大域的最小]

f: 凸関数, $x \in \mathrm{dom}\, f$, $\mathrm{N}(x)$: x の近傍

$f(x) \le f(y)\ (y \in \mathrm{N}(x)) \iff f(x) \le f(y)\ (y \in \mathbf{R}^n)$



∴ 凸関数の最小化問題に**降下法**が適用可!



繰り返す
- ∘ 現在の点の近傍を調べる
- ∘ 近傍内でより関数値の小さい点に移動

$\Longrightarrow$ 最小解に収束

$\longrightarrow$ **凸性をもつ問題は「解きやすい」(最小化しやすい)**

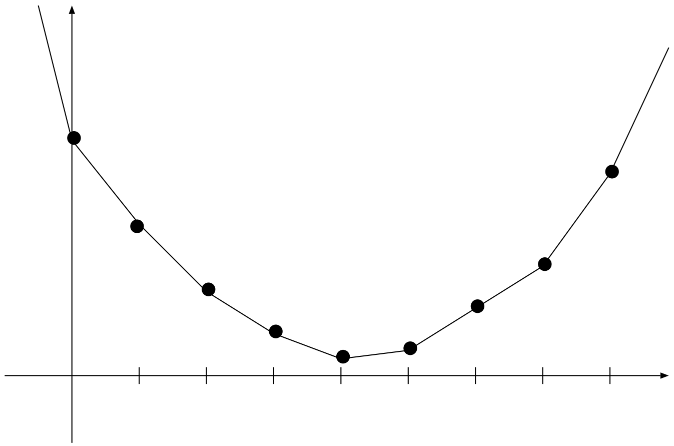
- 離散凸性 ($S \subseteq \mathbf{Z}^n$, $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ に対する凸性) はどのように定義すべきか?

- $\mathbf{Z}$ 上で定義された関数 $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ の場合

f は**離散凸**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f の関数値を結んで得られる関数 $\overline{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が凸関数

(普通の凸関数に**拡張可能**)



… と定義するのが自然

$\mathbf{Z}^n$ 上で定義された関数 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ の場合は?

分離凸関数: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$, 各 $f_i : \mathbf{Z} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は離散凸

— 様々な良い性質を満たす．しかし，狭いクラス

— 集合版は超直方体 $\{x \in \mathbf{Z}^n \mid a_i \le x_i \le b_i \ (\forall i)\}$

離散凸関数の満たすべき性質1[凸拡張可能性]

「離散凸関数」 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ に対し，

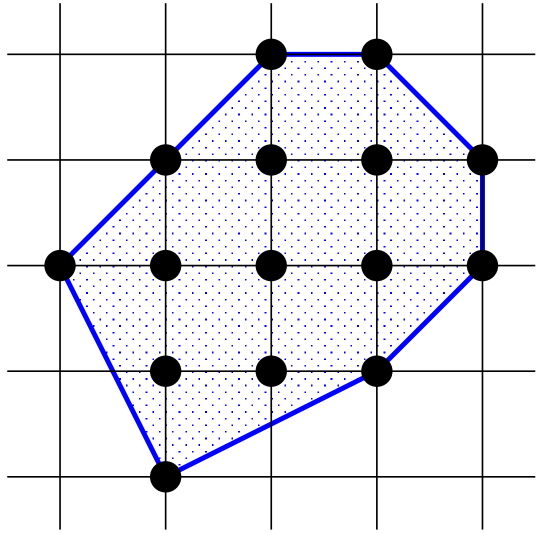
その凸閉包 $\overline{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が $\overline{f}(x) = f(x) \ (x \in \mathbf{Z}^n)$ を満たす

離散凸集合の満たすべき性質1[凸拡張可能性]

「離散凸集合」 $S \subseteq \mathbf{Z}^n$ に対し，

その凸包 $\overline{S}$ が $\overline{S} \cap \mathbf{Z}^n = S$ を満たす

(S に穴がない)



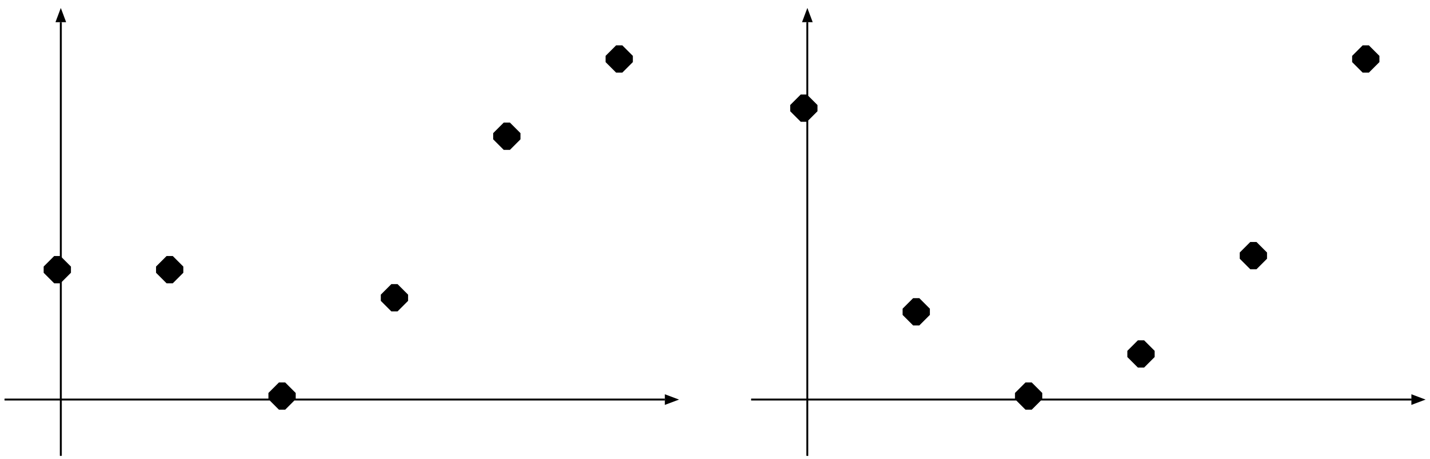
「離散凸性」定義その1 (**凸拡張可能**):

$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は「離散凸関数」 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f は凸関数に拡張可能

$S \subseteq \mathbf{Z}^n$ は「離散凸集合」 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ S の凸包は凸集合

関数 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ の**凸閉包** $\overline{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

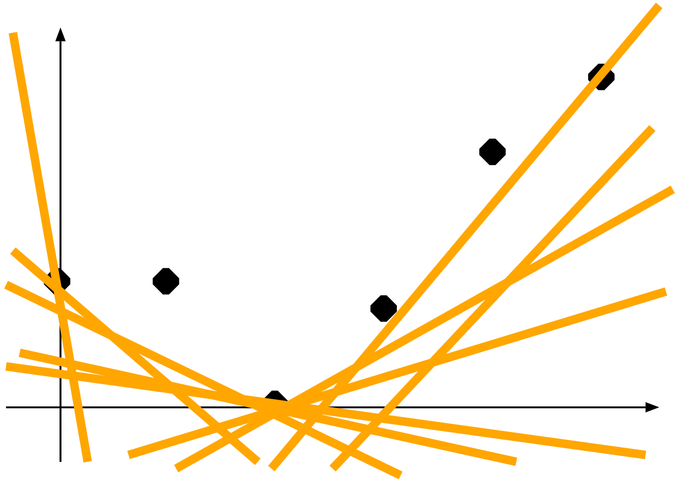
$$\overline{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{p^T x + \alpha \mid p^T y + \alpha \le f(y) \ (y \in \mathrm{dom}\, f)\} \qquad (y \in \mathbf{R}^n).$$

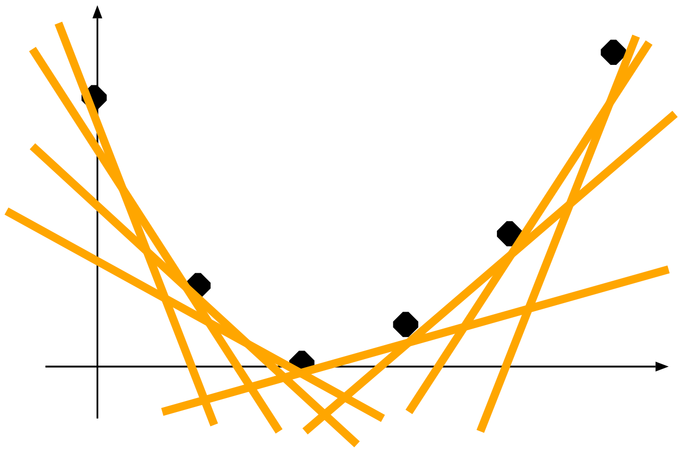


○●○● 離散凸性の満たすべき性質 (その2) ●○●○

関数 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ の凸閉包 $\overline{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

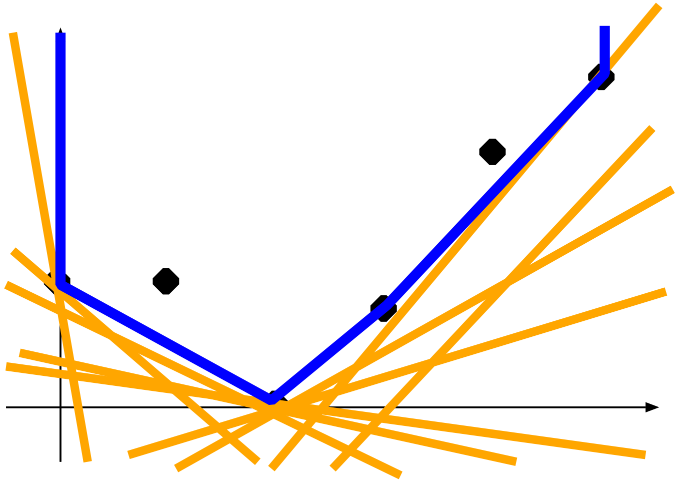
$$\overline{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{p^T x + \alpha \mid p^T y + \alpha \le f(y) \ (y \in \mathrm{dom}\, f)\} \qquad (y \in \mathbf{R}^n).$$

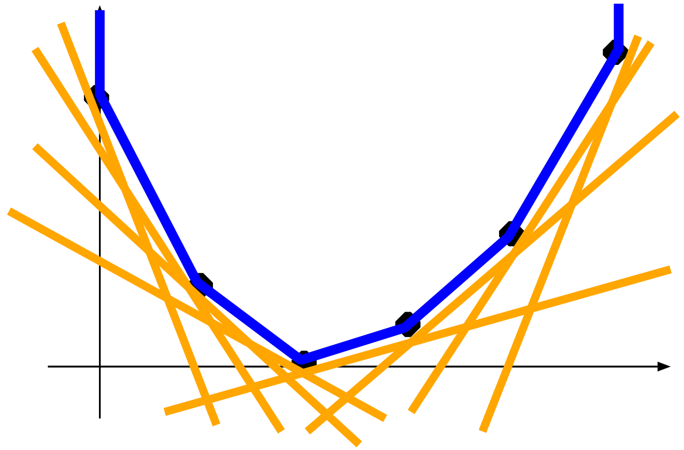




関数 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ の凸閉包 $\overline{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

$$\overline{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{p^T x + \alpha \mid p^T y + \alpha \le f(y) \ (y \in \text{dom}\, f)\} \qquad (y \in \mathbf{R}^n).$$

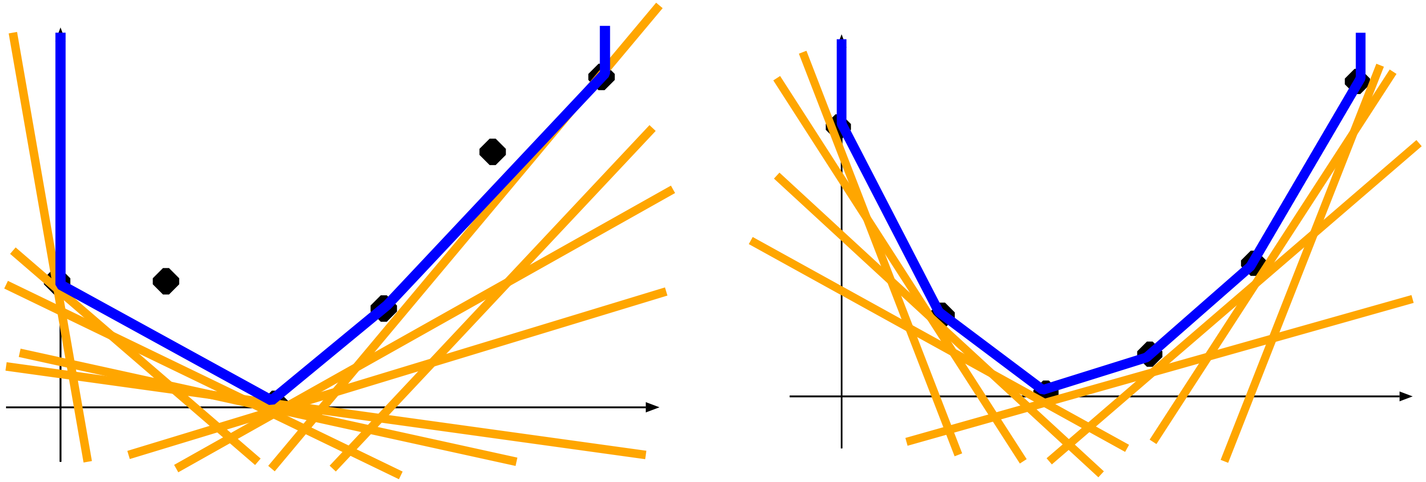




○●○● 離散凸性の満たすべき性質（その2）●○●○

関数 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ の**凸閉包** $\overline{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

$$\overline{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{p^T x + \alpha \mid p^T y + \alpha \leq f(y) \ (y \in \text{dom}\, f)\} \qquad (y \in \mathbf{R}^n).$$



定義域が有界な場合：

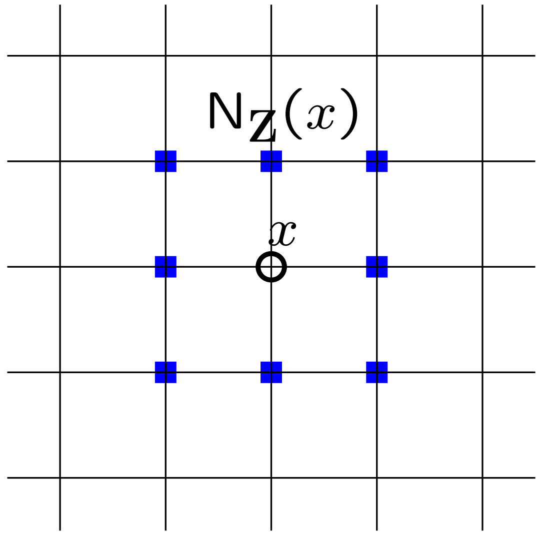
$$\overline{f}(x) = \min\{\sum_{y \in \text{dom}\, f} \lambda_y f(y) \mid \sum_{y \in \text{dom}\, f} \lambda_y = 1,\ \lambda_y \geq 0\ (y \in \text{dom}\, f)\} \qquad (y \in \mathbf{R}^n).$$

○●○● 離散凸性の満たすべき性質（その3） ●○●○

定理１: (普通の) 凸関数に対して「局所最小＝大域的最小」

離散凸関数でも成り立って欲しい — 局所最小性をどう定義するか?

$$\mathsf{N}_{\mathbf{Z}}(x) \equiv \{y \in \mathbf{Z}^n \mid ||y-x||_\infty \le 1\} \qquad (x \in \mathbf{Z}^n)$$



離散凸関数の満たすべき性質２ [局所最小＝大域的最小]

$$f(x) \le f(y) \quad (y \in \mathsf{N}_{\mathbf{Z}}(x)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) \le f(y) \quad (y \in \mathbf{Z}^n)$$

○●○● 離散凸性の満たすべき性質（その4） ●○●○

離散凸関数の満たすべき性質２ [局所最小＝大域的最小]

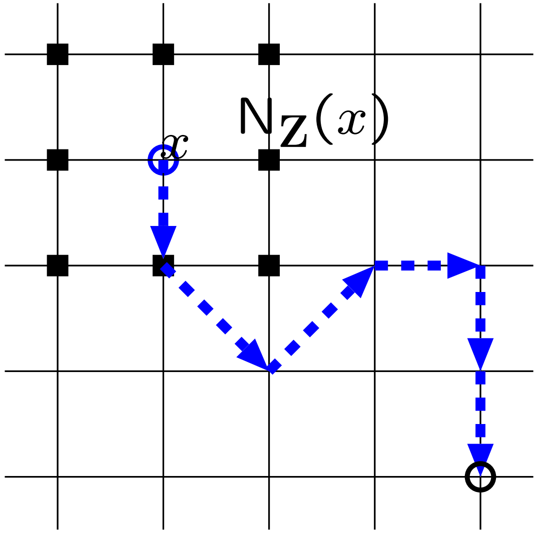
$$f(x) \leq f(y) \quad (y \in \mathrm{N}_{\mathbf{Z}}(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leq f(y) \quad (y \in \mathbf{Z}^n)$$

$\therefore$ 「離散凸関数」の最小化問題に**降下法**が適用可!

繰り返す
- ◦ 現在の点 x の近傍 $\mathrm{N}_{\mathbf{Z}}(x)$ を調べる
- ◦ 近傍内でより関数値の小さい点に移動

$\Longrightarrow$ 最小解に収束

$\longrightarrow$ **離散凸性をもつ問題は「解きやすい」**

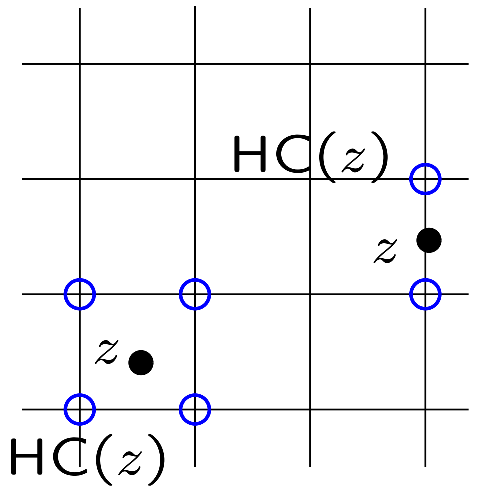


- 凸集合の定義の離散版 ($S \subseteq \mathbf{Z}^n$)

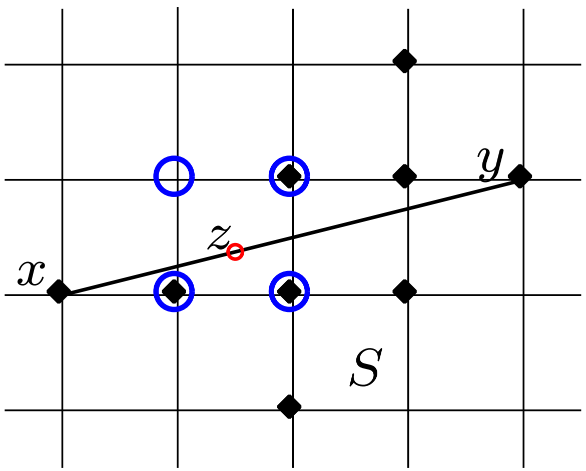
$x, y \in S$, $0 \le \alpha \le 1$ に対し，$z = \alpha x + (1-\alpha) y$ は整数ベクトルとは限らない

$\Longrightarrow$ z の近くに S の点があればOKとする

$\mathrm{HC}(z) \equiv \{x' \in \mathbf{Z}^n \mid \lfloor z_i \rfloor \le x'_i \le \lceil z_i \rceil \ (\forall i)\}$



「離散凸性」定義その2 (**Miller1971**):
$S \subseteq \mathbf{Z}^n$ は「離散凸集合」
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in S$, $0 \le \forall \alpha \le 1$: $\mathrm{HC}(z) \cap S \neq \emptyset$



「離散凸性」定義その２ (**Miller1971**):

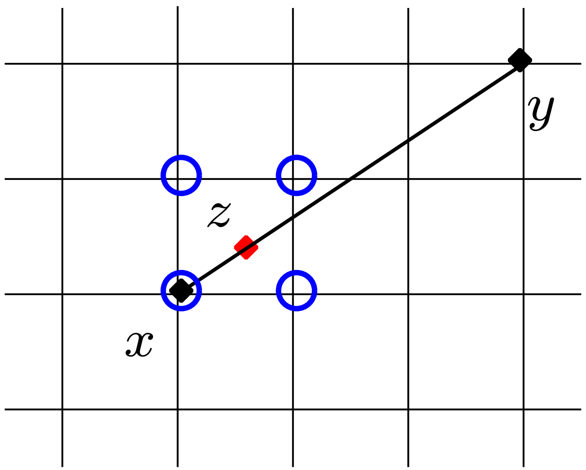
$S \subseteq \mathbf{Z}^n$ は「離散凸関数」

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in S$, $0 \le \forall\alpha \le 1$:

$$\min\{f(z') \mid z' \in \mathrm{HC}(z)\} \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \qquad (z = \alpha x + (1-\alpha) y)$$

性質 3: Millerの離散凸関数は「局所最小＝大域的最小」を満たす

$\because$ Millerの離散凸関数の定義より簡単に示せる



$f(y) < f(x)$

$\Longrightarrow$ x に十分近い $z = \alpha x + (1-\alpha) y$ に対し,

$\quad \min\{f(z') \mid z' \in \mathrm{HC}(z)\} < f(x)$

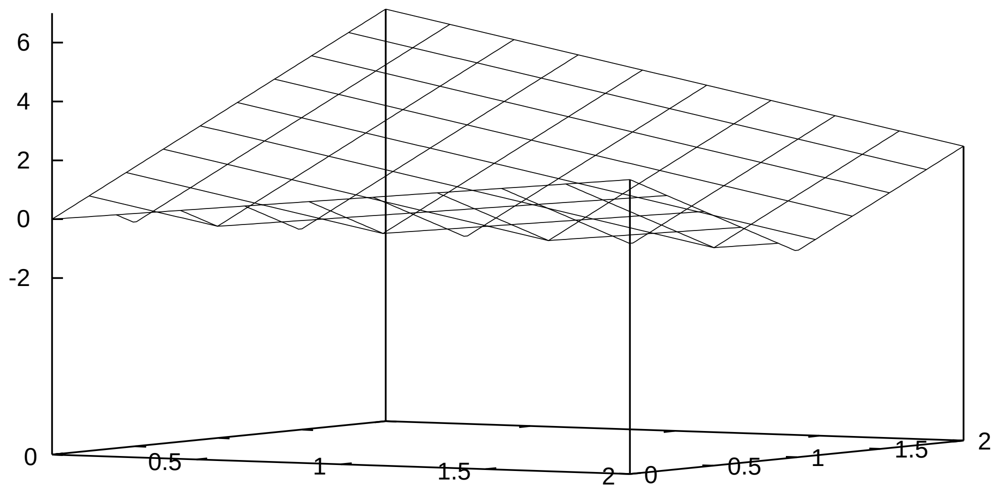
$\Longrightarrow$ $\exists z' \in \mathrm{HC}(z) \cap \mathrm{N}_{\mathbf{Z}}(x)$: $f(z') < f(x)$

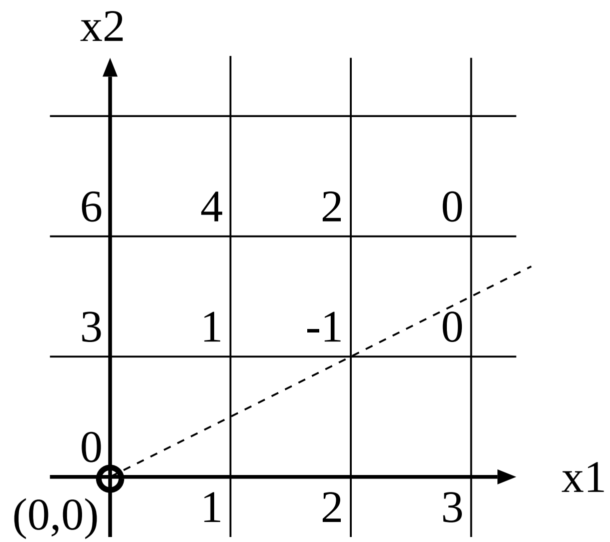
$$\left.\begin{array}{l}\text{凸拡張可能関数}\\ \text{Millerの離散凸関数}\end{array}\right\}$$ は離散凸関数としてふさわしいか? — NO!

例1 [凸拡張可能 $\not\Longrightarrow$「局所最小＝大域的最小」]

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \max\{x_1 - 3x_2, -2x_1 + 3x_2\} & (x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0) \\ +\infty & (\text{o.w.}) \end{cases}$$

f: 凸拡張可能,　　　$x = (0,0)$: 局所最小, でも大域的最小ではない





$\therefore$ 凸拡張可能関数 $\not\Longrightarrow$ Miller の離散凸性関数

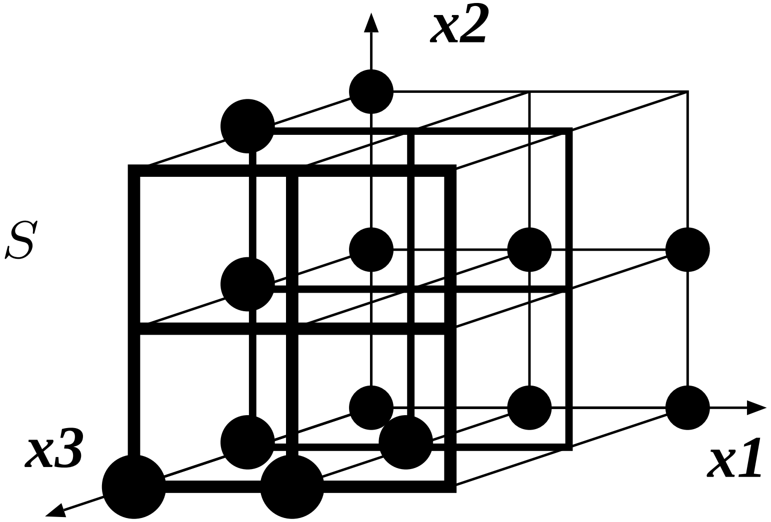
例2. [Millerの離散凸 $\not\Longrightarrow$ 凸拡張可能]

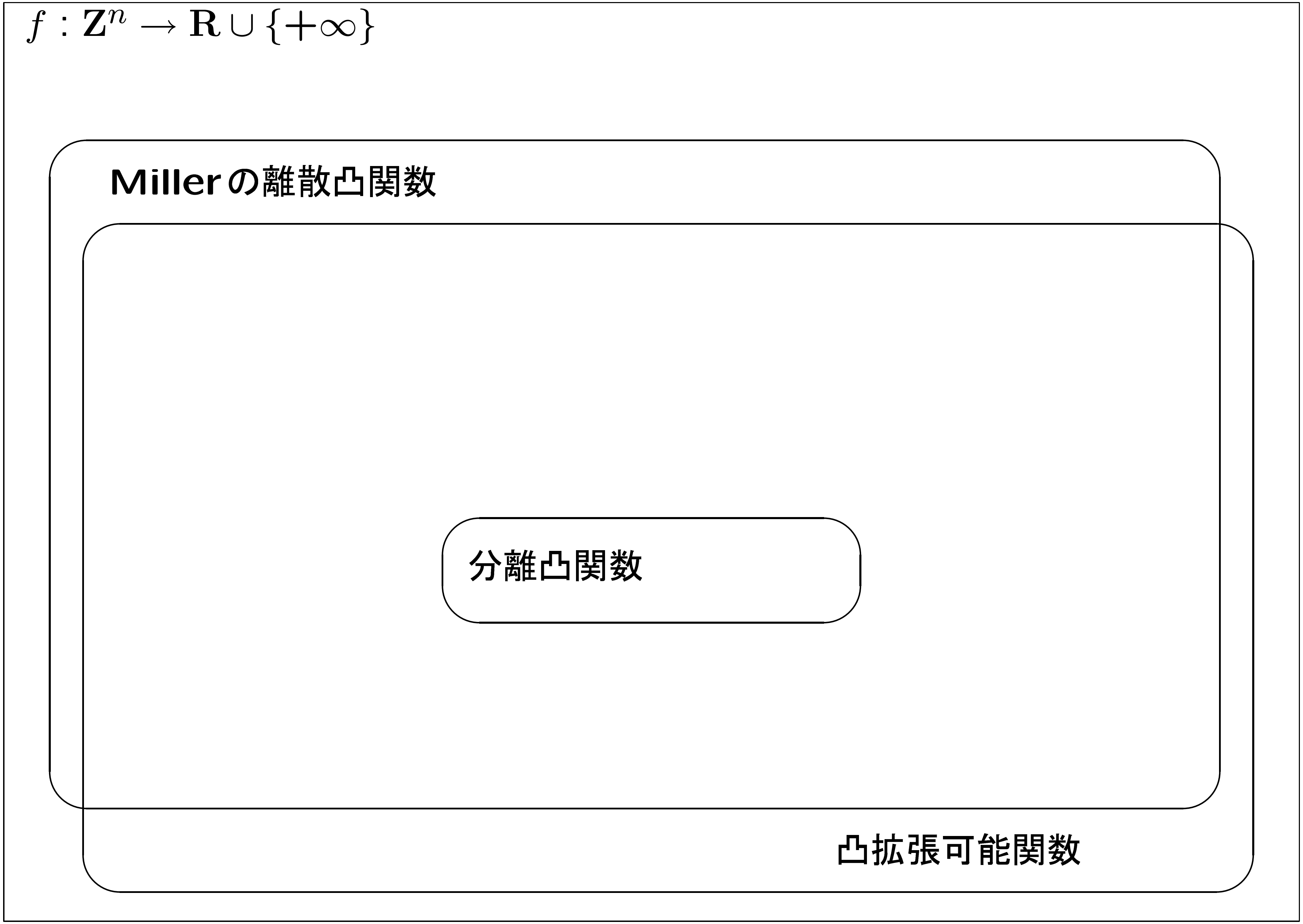
$$S = \{x \in \mathbf{Z}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \leq 2,\ x_i \geq 0\ (i = 1, 2, 3)\}$$
$$\cup \{(1, 2, 0), (0, 1, 2), (2, 0, 1)\}$$

S はMillerの離散凸集合

しかし, 凸包 $\overline{S}$ は $\overline{S} \cap \mathbf{Z}^n = S$ を満さない

$$\frac{1}{3}\{(1, 2, 0) + (0, 1, 2) + (2, 0, 1)\} = (1, 1, 1) \notin S$$

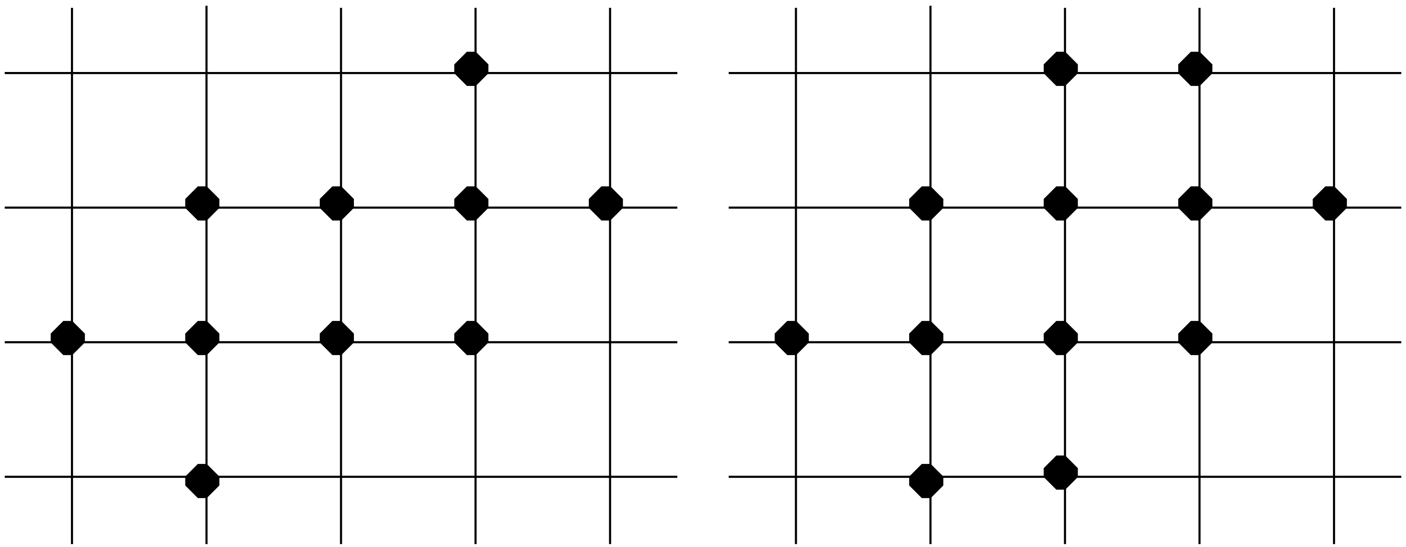



$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$
Millerの離散凸関数
分離凸関数
凸拡張可能関数


$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$
Millerの離散凸関数
「Miller の離散凸関数」と「凸拡張可能関数」の
共通部分に含まれる関数のクラス
— 整凸関数 (Favati–Tardella1990)
分離凸関数
凸拡張可能関数

$S \subseteq \mathbf{Z}^n$

- $\overline{S} \equiv S$ の**凸包**
- $\tilde{S} \equiv \displaystyle\bigcup_{x \in \mathbf{Z}^n} \overline{S \cap [x, x+\mathbf{1}]}$ — 各単位立方体上での凸包を集めたもの

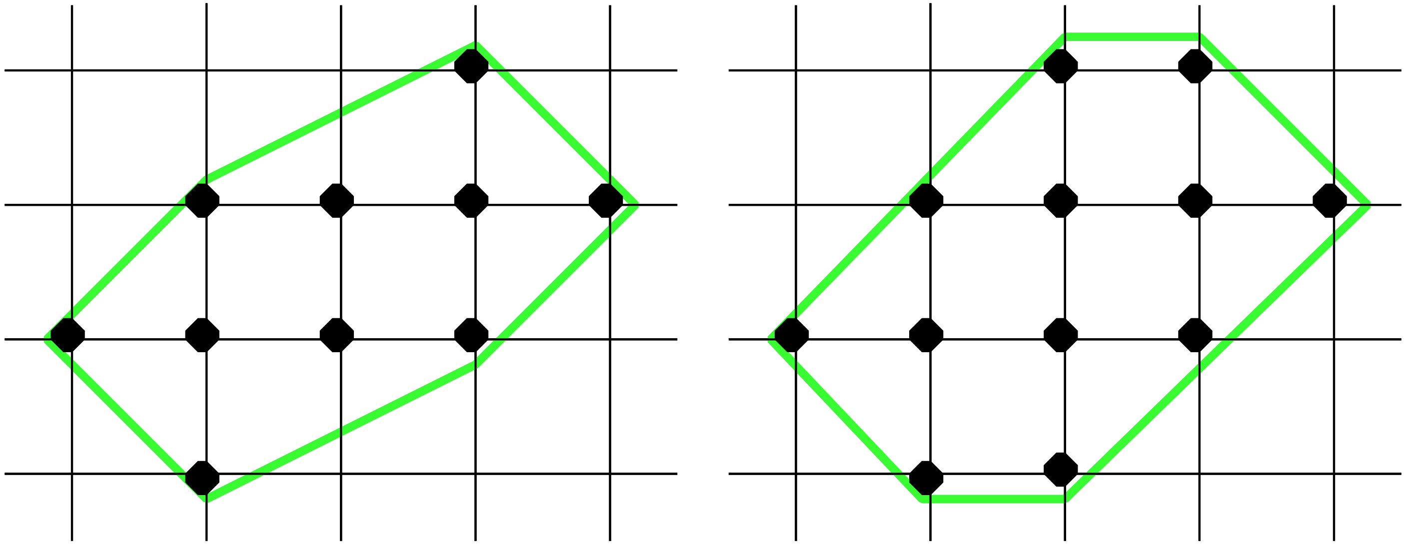


$\overline{S} \neq \tilde{S}$ $\qquad$ $\overline{S} = \tilde{S}$

S は**整凸集合** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\overline{S} = \tilde{S}$ $\Longleftrightarrow$ $\tilde{S}$ は凸集合

$S \subseteq \mathbf{Z}^n$

- $\overline{S} \equiv S$ の凸包
- $\tilde{S} \equiv \bigcup_{x \in \mathbf{Z}^n} \overline{S \cap [x, x+\mathbf{1}]}$ — 各単位立方体上での凸包を集めたもの

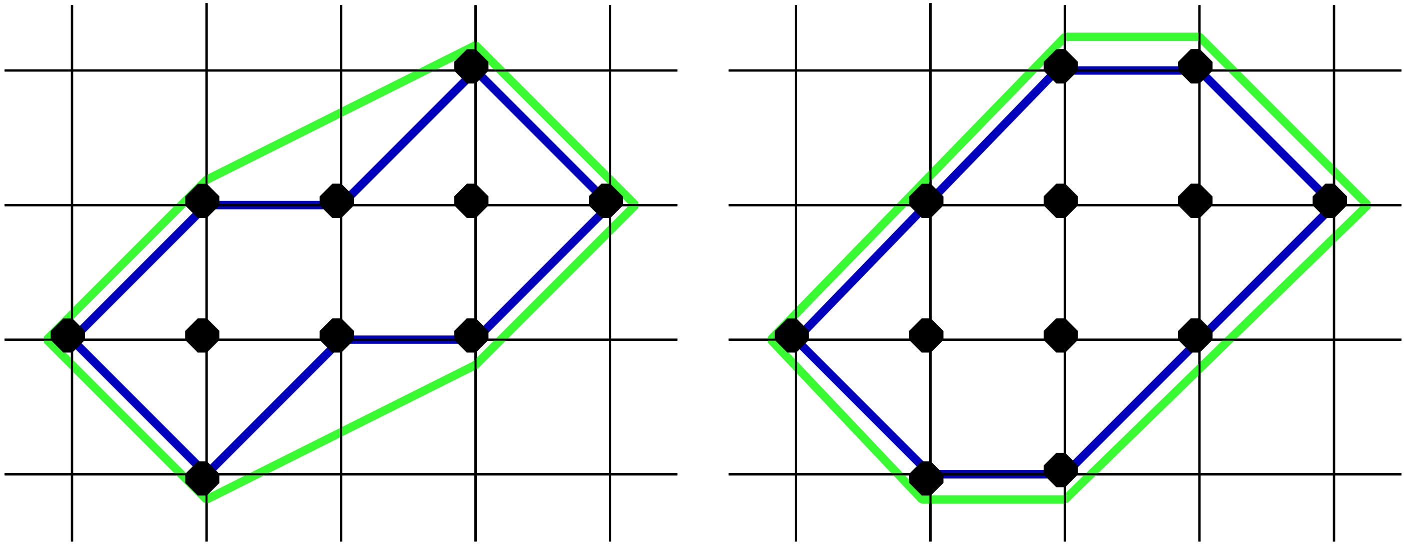


$\overline{S} \neq \tilde{S}$ $\qquad$ $\overline{S} = \tilde{S}$

S は**整凸集合** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\overline{S} = \tilde{S}$ $\Longleftrightarrow$ $\tilde{S}$ は凸集合

$S \subseteq \mathbf{Z}^n$

- $\overline{S} \equiv S$ の凸包
- $\tilde{S} \equiv \bigcup_{x \in \mathbf{Z}^n} \overline{S \cap [x, x + \mathbf{1}]}$ — 各単位立方体上での凸包を集めたもの



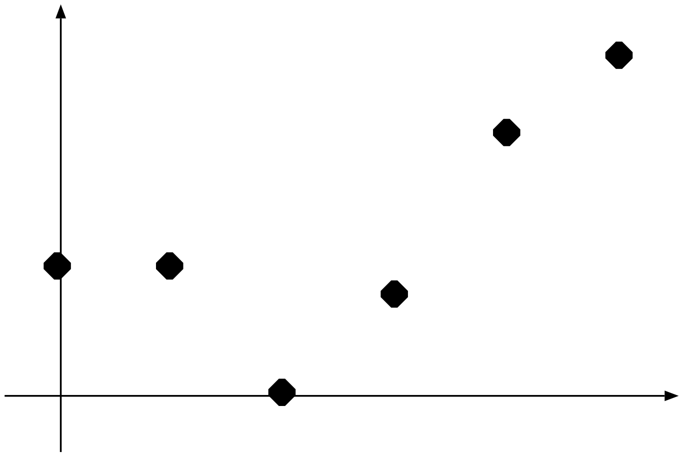
$\overline{S} \neq \tilde{S}$ $\qquad$ $\overline{S} = \tilde{S}$

S は**整凸集合** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\overline{S} = \tilde{S}$ $\Longleftrightarrow$ $\tilde{S}$ は凸集合

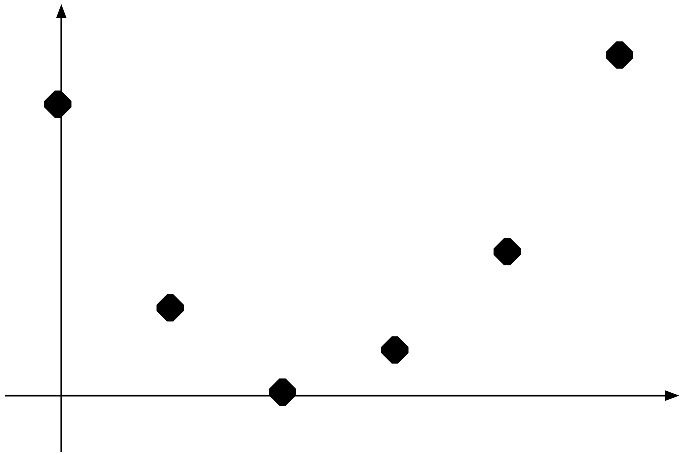
$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

- $\overline{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ $\cdots$ f の凸閉包
- $\tilde{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

  $\cdots$ 各単位立方体 $[x, x+\mathbf{1}]$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$ 上での f の凸閉包を集めたもの



$\overline{f} \neq \tilde{f}$



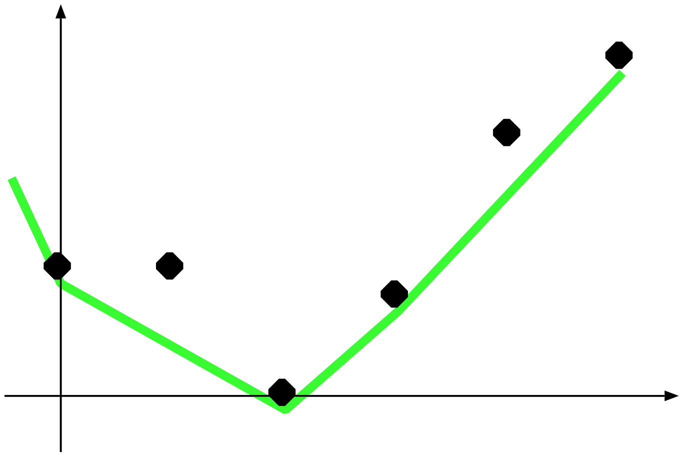
$\overline{f} = \tilde{f}$

f は**整凸関数** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\overline{f} = \tilde{f}$ $\iff$ $\tilde{f}$ は凸関数

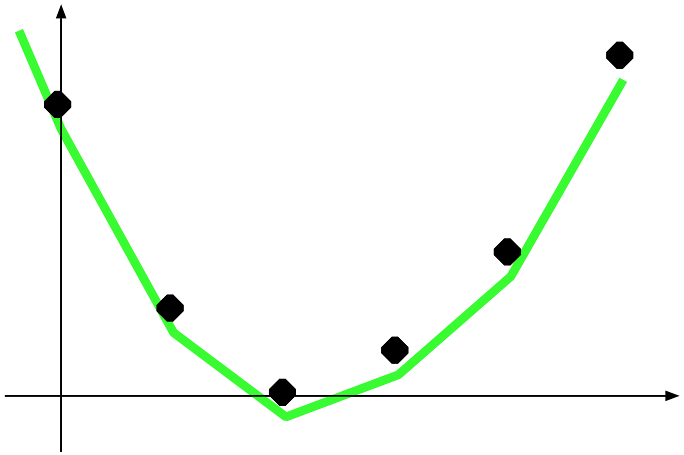
$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

- $\overline{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cdots$ f の凸閉包
- $\tilde{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

  $\cdots$ 各単位立方体 $[x, x + \mathbf{1}]$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$ 上での f の凸閉包を集めたもの



$\overline{f} \neq \tilde{f}$



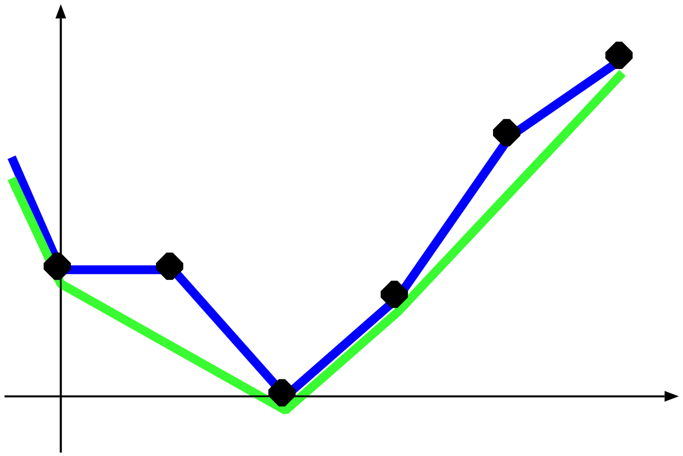
$\overline{f} = \tilde{f}$

f は**整凸関数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\overline{f} = \tilde{f}$ $\Longleftrightarrow$ $\tilde{f}$ は凸関数

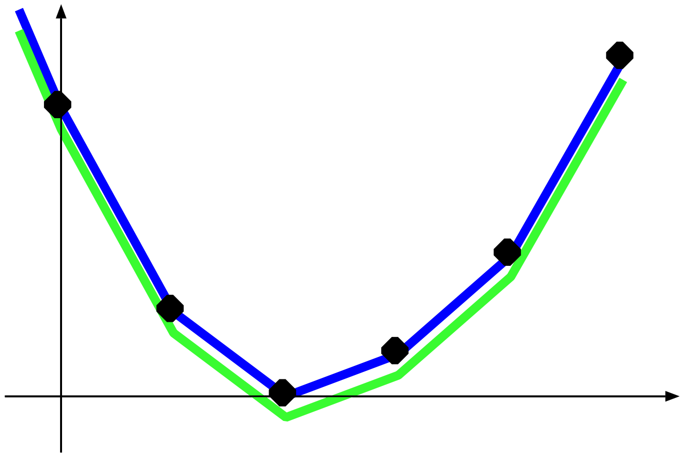
$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

- $\overline{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ $\cdots$ f の凸閉包
- $\tilde{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

  $\cdots$ 各単位立方体 $[x, x + \mathbf{1}]$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$ 上での f の凸閉包を集めたもの



$\overline{f} \neq \tilde{f}$



$\overline{f} = \tilde{f}$

f は**整凸関数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\overline{f} = \tilde{f}$ $\Longleftrightarrow$ $\tilde{f}$ は凸関数

○●○● 整凸性 (その3) ●○●○

整凸集合，整凸関数の性質— $S \subseteq \mathbf{Z}^n$, $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

- 整凸 $\Longrightarrow$ 凸拡張可能 ($\because$ 定義より自明)
- 整凸 $\Longrightarrow$ Millerの離散凸 ($\because$ 整凸性の定義より)
  $\Longrightarrow$ 「局所最小＝大域的最小」

整凸関数は離散凸関数としてふさわしいか? — 不十分!

- $\{0, 1\}^n$ 上で定義された任意の関数は整凸関数
  (「良い」関数も「悪い」関数も含んでしまう)
- 整凸関数の和は整凸関数とは限らない
  (凸関数の和は必ず凸関数)
- さらに...

○●○● 離散凸性の満たすべき性質 (その5) ●○●○

局所最小性 $f(x) \le f(y) \ (y \in \mathsf{N}_{\mathbf{Z}}(x) \equiv \{y \in \mathbf{Z}^n \mid \|y - x\|_\infty \le 1\})$

— 近傍 $\mathsf{N}_{\mathbf{Z}}(x)$ に含まれる点の数 $=$ 3^n

$\Longrightarrow$ 局所最小性のチェックは指数時間必要!

離散凸関数の満たすべき性質 2′ [局所最小＝大域的最小 (多項式時間版)]

ある近傍 $\tilde{\mathsf{N}}_{\mathbf{Z}}(x)$ が存在して,

- $f(x) \le f(y) \quad (y \in \tilde{\mathsf{N}}_{\mathbf{Z}}(x)) \iff f(x) \le f(y) \quad (y \in \mathbf{Z}^n)$
- 局所最小性のチェックが多項式時間で可能

○●○●　離散凸性の満たすべき性質 (その6)　●○●○

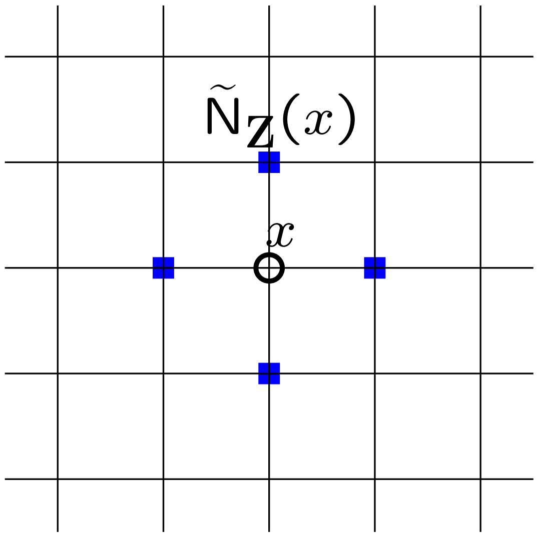
例: 分離凸関数 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$

$$\boxed{f(x) \le f(x \pm \chi_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) \le f(y) \quad (y \in \mathbf{Z}^n)}$$

$\Longrightarrow \tilde{\mathsf{N}}_{\mathbf{Z}}(x) \equiv \{x \pm \chi_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$

近傍内の点の数$= 2n + 1$

$$\chi_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



凸関数の性質（その2）

●○●○

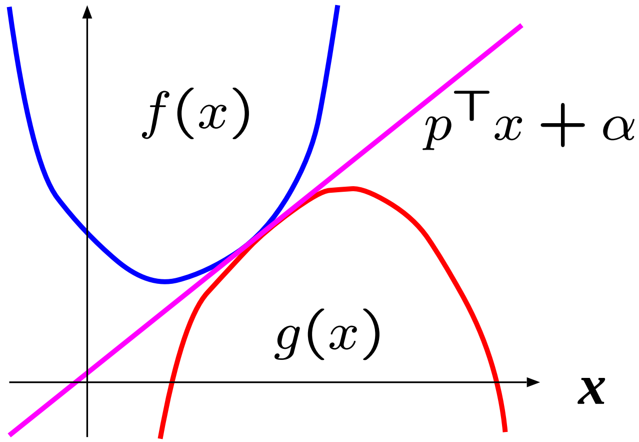
$g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ は**凹関数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $-g$ は凸関数

定理 2 [分離定理]

f: 凸関数, g: 凹関数, $f(x) \geq g(x)$ $(x \in \mathbf{R}^n)$

$\Longrightarrow \exists p \in \mathbf{R}^n, \alpha \in \mathbf{R}$ s.t.

$$f(x) \geq p^\top x + \alpha \geq g(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$



- 非線形計画の双対定理を導く
- 凸関数の和 $f_1 + f_2$ の最小化が２つの凸関数の最小化に帰着可能

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \{f_1(x) + f_2(x)\} = \min_{x \in \mathbf{R}^n} \{f_1(x) + p^\top x\} + \min_{x \in \mathbf{R}^n} \{f_2(x) - p^\top x\}$$

離散凸関数の満たすべき性質３ [離散分離定理]

f : 「離散凸」関数, g : 「離散凹」関数, $f(x) \geq g(x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$

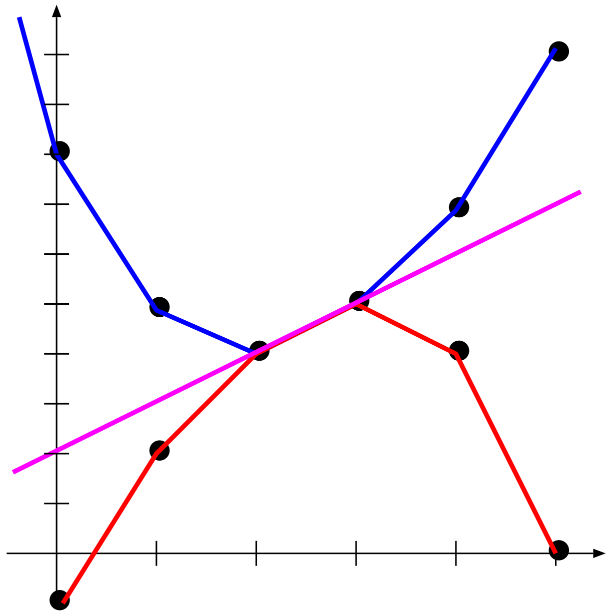
$\Longrightarrow$ $\exists p \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in \mathbf{R}$ s.t. $f(x) \geq p^\top x + \alpha \geq g(x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$

離散凸関数の満たすべき性質３′ [離散分離定理 (整数版)]

f : 整数値「離散凸」関数, g : 整数値「離散凹」関数, $f(x) \geq g(x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$

$\Longrightarrow$ $\exists p \in \mathbf{Z}^n$, $\alpha \in \mathbf{Z}$ s.t. $f(x) \geq p^\top x + \alpha \geq g(x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$

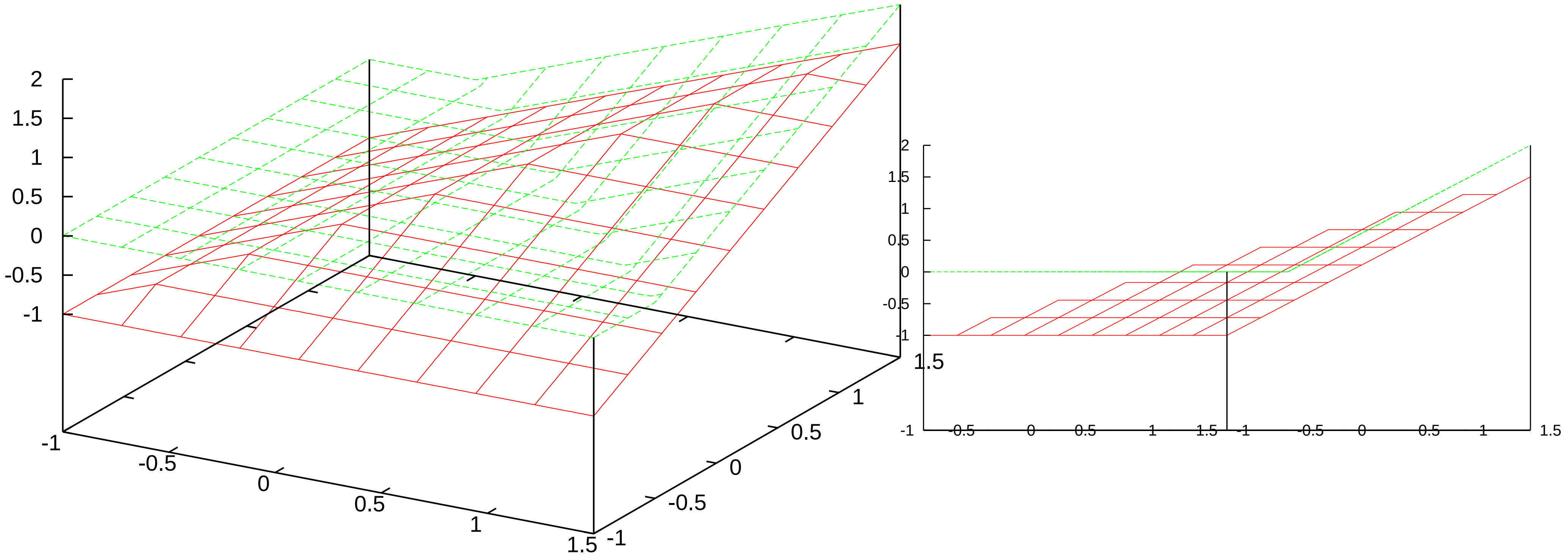
分離凸関数 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ は「性質３′」を満たす



例3. [整凸 $\not\Longrightarrow$ 離散分離定理]

$f(x_1, x_2) = \max\{0, x_1 + x_2 - 1\} \quad ((x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^2)$, 整凸

$g(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\} \quad ((x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^2)$, 整凹



$f(x) \geq p^{\top} x + \alpha \geq g(x)$ を満たす線形関数 $p^{\top} x + \alpha$ は存在しない!

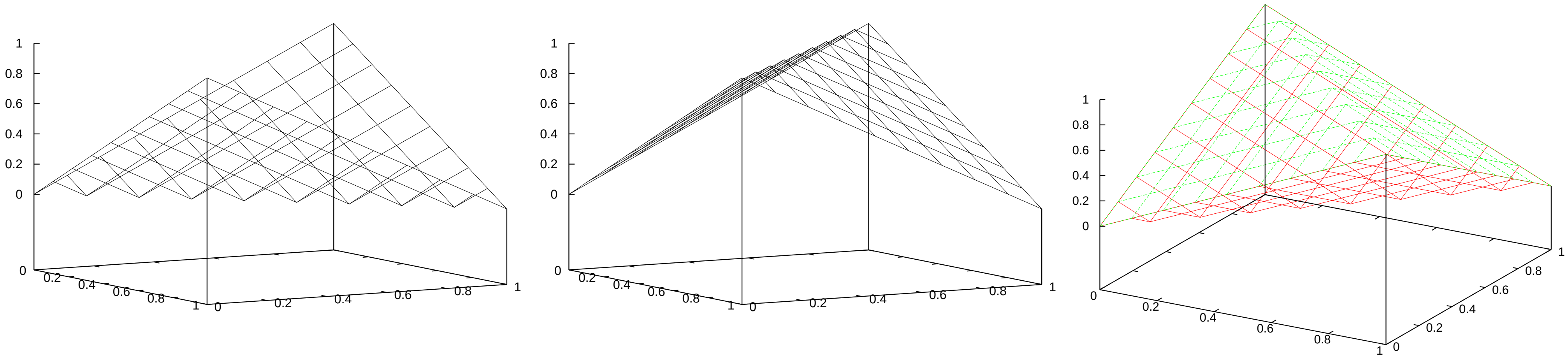
○●○● 整凸性（その5） ●○●○

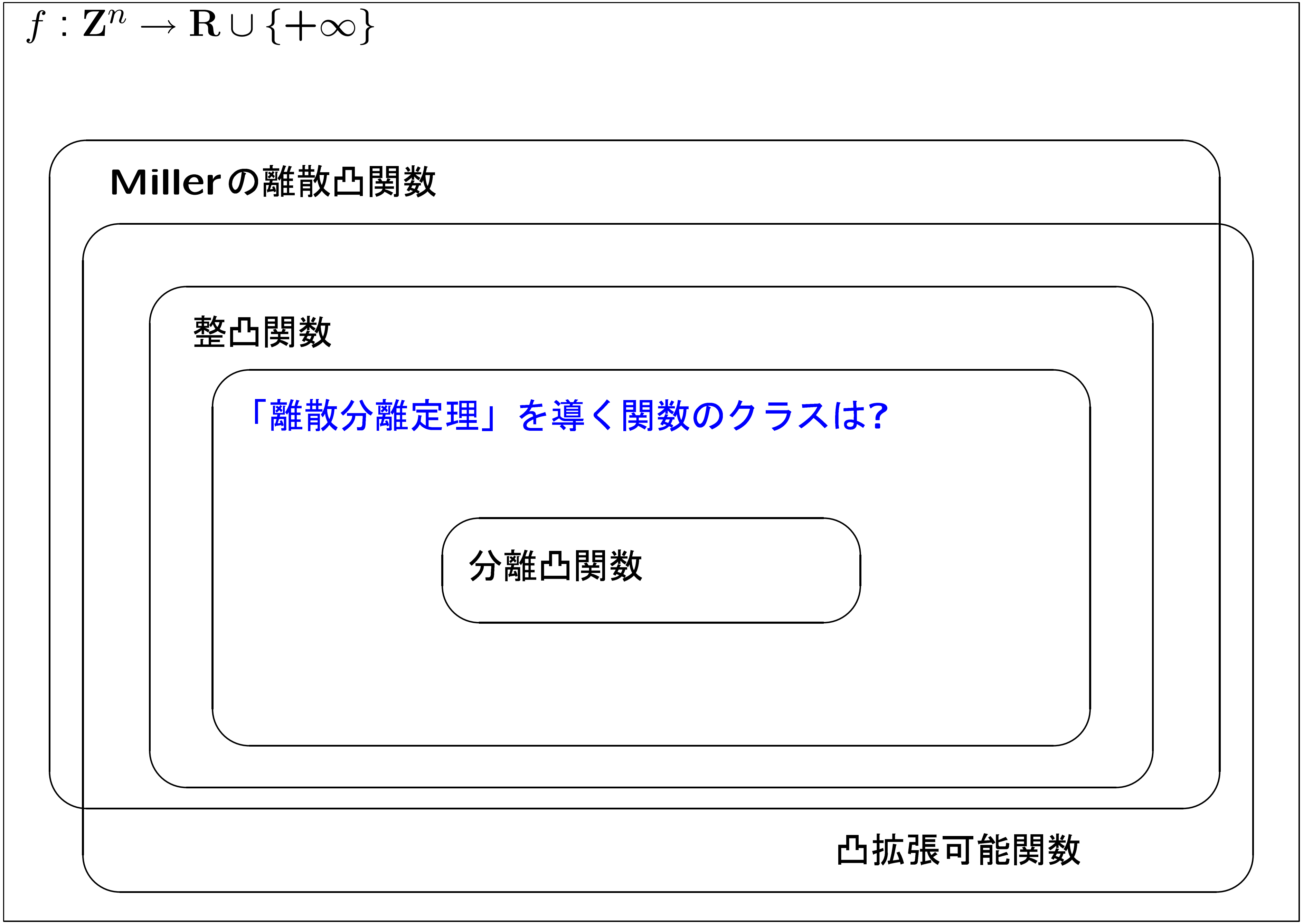
例 4. [整凸 $\not\Longrightarrow$ 離散分離定理]

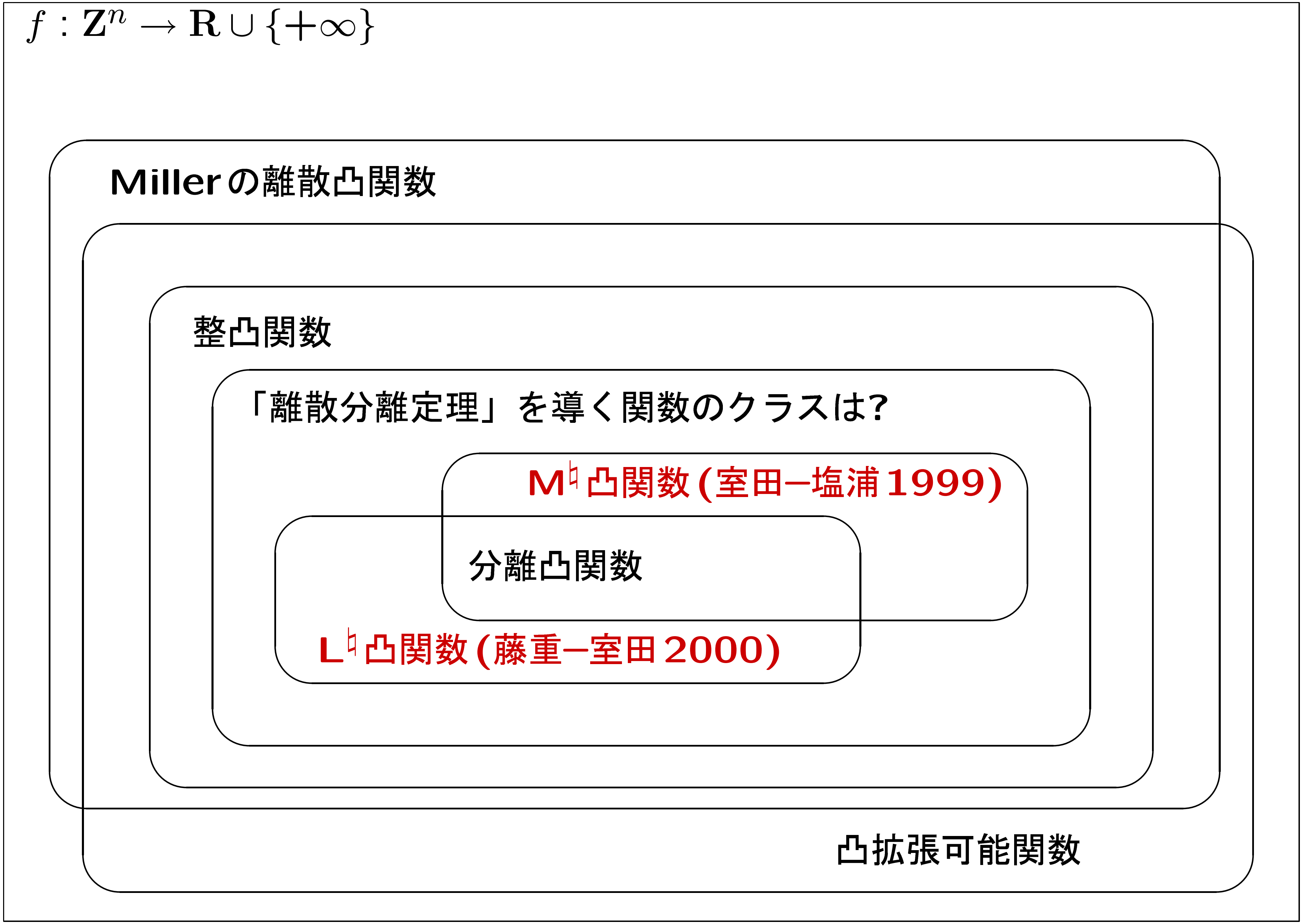
$f : \{0,1\}^2 \to \mathbf{Z},\ f(0,1) = f(1,0) = 1,\ f(0,0) = f(1,1) = 0$
$g : \{0,1\}^2 \to \mathbf{Z},\ g(x) = f(x)\ \ (x \in \{0,1\}^2)$
$\Longrightarrow$ f: 整凸, g: 整凹, $f(x) \geq g(x)\ \ (\forall x \in \mathbf{Z}^2)$

しかし, $\overline{f}(x) \leq \overline{g}(x) \qquad (\forall x \in [0,1]^2)$
　　($\overline{f}$: f の凸関数への拡張, $\overline{g}$: g の凹関数への拡張)

$f(x) \geq p^\top x + \alpha \geq g(x)$ を満たす線形関数 $p^\top x + \alpha$ は存在しない!

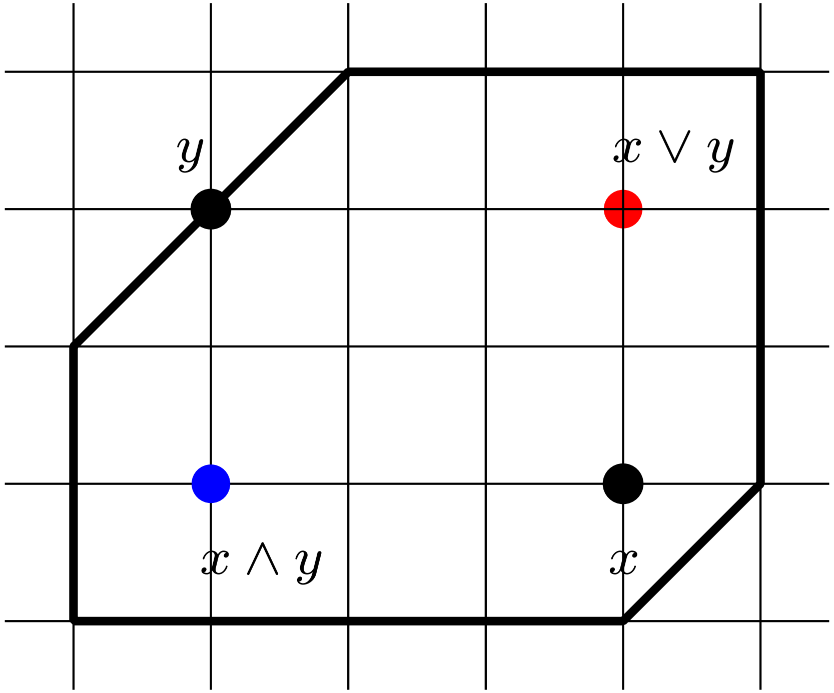



$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$
Millerの離散凸関数
整凸関数
「離散分離定理」を導く関数のクラスは?
分離凸関数
凸拡張可能関数


$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$
Millerの離散凸関数
整凸関数
「離散分離定理」を導く関数のクラスは?
M♮凸関数 (室田–塩浦 1999)
分離凸関数
L♮凸関数 (藤重–室田 2000)
凸拡張可能関数

○●○● $\mathrm{L}^\natural$凸集合の定義 ●○●○

$S \subseteq \mathbf{Z}^n$ は$\mathrm{L}^\natural$凸集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} S \text{ は 整凸集合} \\ x \wedge y \in S,\ x \vee y \in S \ (\forall x, y \in S) \end{cases}$

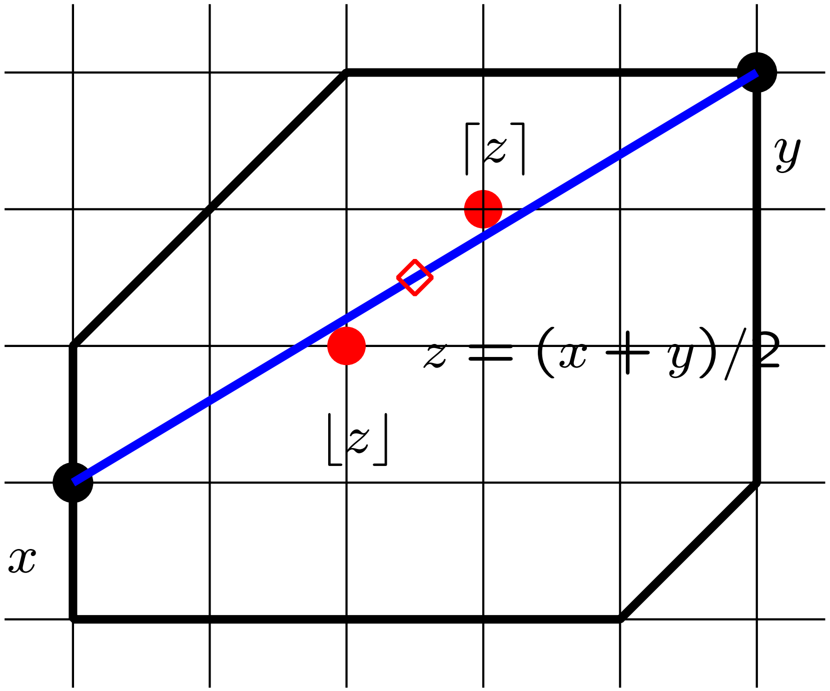


$$(x \wedge y)_i = \min\{x_i, y_i\} \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$
$$(x \vee y)_i = \max\{x_i, y_i\} \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

- $S \subseteq \mathbf{R}^n$ は(普通の)凸集合 $\iff \dfrac{x+y}{2} \in S \ (\forall x, y \in S)$ **[中点凸性]**

- $S \subseteq \mathbf{Z}^n$ はL♮凸集合

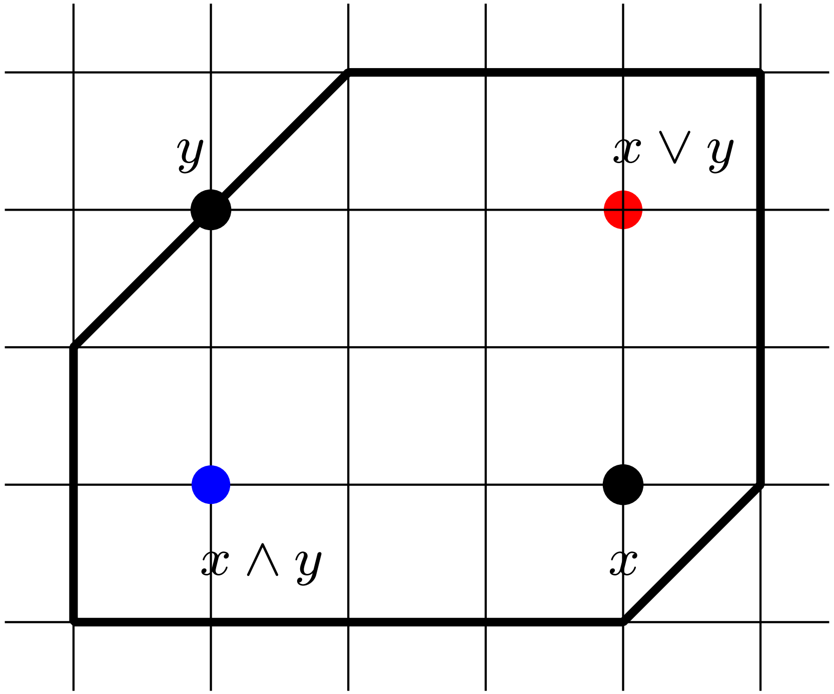
$$\iff \left\lceil \frac{x+y}{2} \right\rceil \in S,\ \left\lfloor \frac{x+y}{2} \right\rfloor \in S \ (\forall x, y \in S)$$ **[離散中点凸性]**



L$^\natural$凸集合 $S \subseteq \mathbf{Z}^n$ は線形不等式系により記述可能

S は L$^\natural$凸集合 $\iff$ $\exists\ \ell_{ij}, \ell_i \in \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$, $u_{ij}, u_i \in \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$:

$$S = \left\{ x \in \mathbf{Z}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \ell_{ij} \leq x_i - x_j \leq u_{ij} \ (\forall i \neq j) \\ \ell_i \leq x_i \leq u_i \ (\forall i) \end{array} \right\}$$



○●○● L$^\natural$凸関数の定義 ●○●○

$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は**L$^\natural$凸関数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 整凸かつ劣モジュラ

$$f(x) + f(y) \geq f(x \wedge y) + f(x \vee y) \quad (\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f)$$

- $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ はL$^\natural$凸関数

$$\Longleftrightarrow \ f(x) + f(y) \geq f\left(\left\lceil \frac{x+y}{2} \right\rceil\right) + f\left(\left\lfloor \frac{x+y}{2} \right\rfloor\right) \quad (\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f)$$ **[離散中点凸性]**

○●○● L$^\natural$凸関数の例 ●○●○

- 分離凸関数 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i)$ は L$^\natural$凸関数

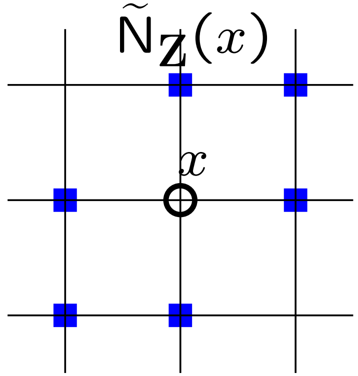
- 関数 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) + \sum_{i \neq j} \varphi_{ij}(x_i - x_j)$ (φ_i, φ_{ij} は 1 変数凸関数) は L$^\natural$凸関数

- L$^\natural$凸関数は整凸関数 $\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{満たすべき性質1 [凸拡張可能]} \\ \text{満たすべき性質2 [局所最小＝大域的最小]} \end{array} \right.$

- 満たすべき性質2$'$ [局所最小＝大域的最小 (多項式時間版)]

$f(x) \le f(x \pm d)\ \ (d \in \{0,1\}^n) \iff f(x) \le f(y)\ \ (y \in \mathbf{Z}^n)$

($\because$ 離散中点凸性＋帰納法)



局所最小性判定は劣モジュラ集合関数最小化に帰着可
$\longrightarrow$ 多項式時間で判定できる

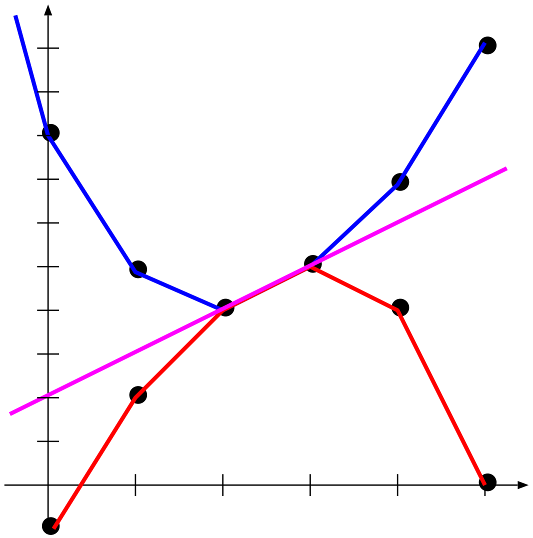
- 満たすべき性質3$'$ [離散分離定理 (整数版)]

f : 整数値 L$^\natural$凸関数, g : 整数値 L$^\natural$凹関数,

$f(x) \ge g(x)\ \ (x \in \mathbf{Z}^n)$

$\Longrightarrow \exists p \in \mathbf{Z}^n,\ \alpha \in \mathbf{Z}$ s.t.

$\quad f(x) \ge p^{\top} x + \alpha \ge g(x)\ \ (x \in \mathbf{Z}^n)$



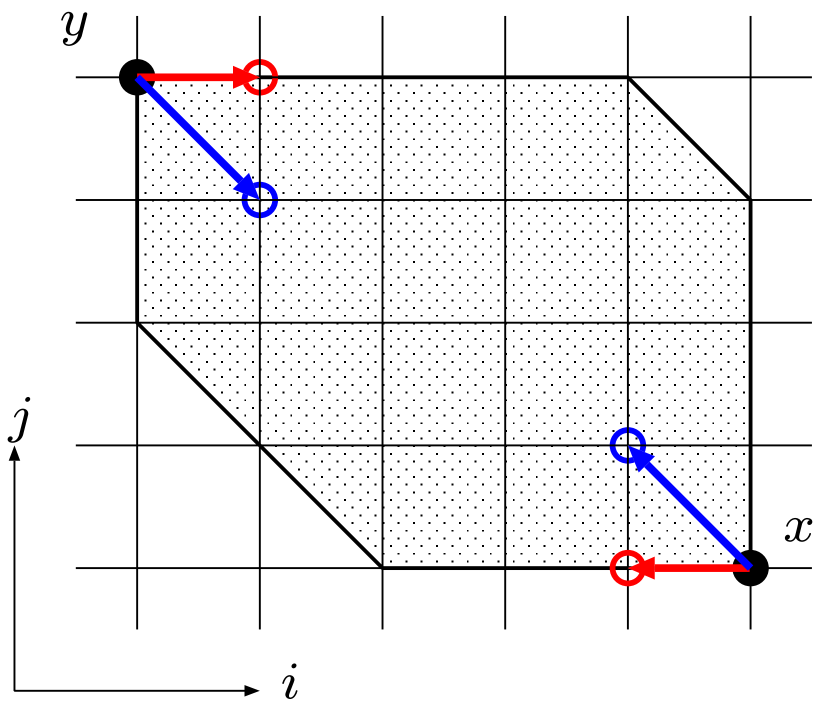
$S \subseteq \mathbf{Z}^n$ は **M♮凸集合** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次の公理を満たす

$\forall x, y \in S$, $\forall i \in \mathrm{supp}^+(x-y)$:

(i) $x - \chi_i + \chi_j \in S$, $y + \chi_i - \chi_j \in S$ $(\exists j \in \mathrm{supp}^-(x-y))$, もしくは

(ii) $x - \chi_i \in S$, $y + \chi_i \in S$

$$\mathrm{supp}^+(x-y) = \{i \mid x_i > y_i\}$$
$$\mathrm{supp}^-(x-y) = \{i \mid x_i < y_i\}$$
$$\chi_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



- M♮凸集合 $\simeq$ ポリマトロイド, 劣モジュラ多面体
- $S \subseteq \{0,1\}^n$ なるM♮凸集合 $\simeq$ マトロイド

M$^\natural$凸集合 $S \subseteq \mathbf{Z}^n$ は線形不等式系により記述可能

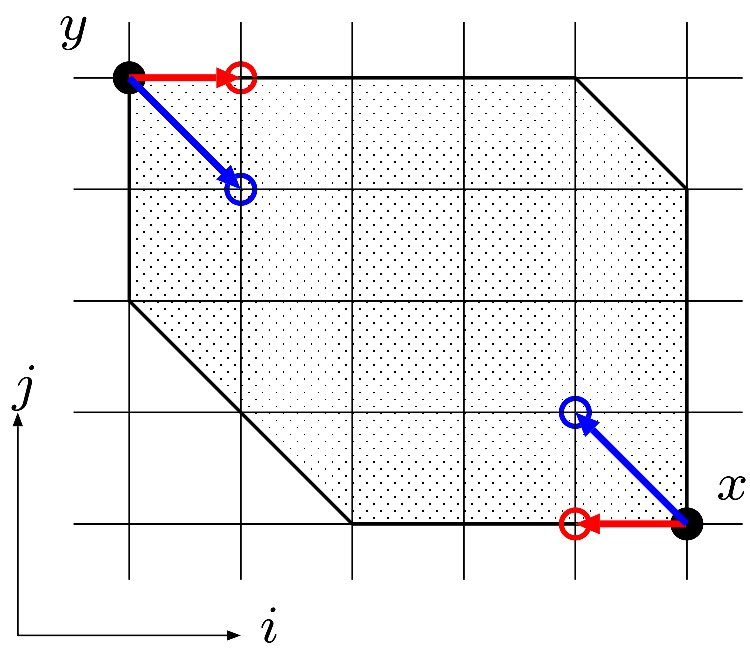
S は M$^\natural$凸集合 $\iff$ $\exists \rho : 2^N \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}, \mu : 2^N \to \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$:

$$S = \{x \in \mathbf{Z}^n \mid \mu(X) \leq x(X) \leq \rho(X) \ (X \subseteq N)\}$$

ここで

- ρ は劣モジュラ, μ は優モジュラ
- $\rho(X) - \rho(X \setminus Y) \geq \mu(Y) - \mu(Y \setminus X) \ (\forall X, Y \subseteq N)$

$\therefore$ M$^\natural$凸集合は一般化ポリマトロイド
(の整数点集合)に一致.
M$^\natural$凸集合は整凸集合.



○●○● M$^\natural$凸関数の定義 ●○●○

$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は **M$^\natural$凸関数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次の公理を満たす

$\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f$, $\forall i \in \mathrm{supp}^+(x-y)$:

(i) $f(x) + f(y) \geq f(x - \chi_i + \chi_j) + f(y + \chi_i - \chi_j)$
$(\exists j \in \mathrm{supp}^-(x-y))$, もしくは

(ii) $f(x) + f(y) \geq f(x - \chi_i) + f(y + \chi_i)$

- 分離凸関数はM$^\natural$凸関数

- 層族 $\mathcal{F}$ および凸関数 φ_X $(X \in \mathcal{F})$ に対し，$f(x) = \sum_{X \in \mathcal{F}} \varphi_X(x(X))$ はM$^\natural$凸関数

$(X, Y \in \mathcal{F} \Longrightarrow X \cap Y = \emptyset$ or $X \subseteq Y$ or $X \supseteq Y)$

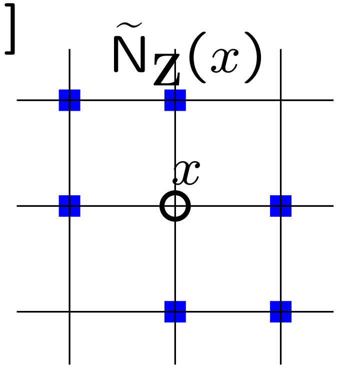
- M♮凸関数は整凸関数 $\Longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\text{満たすべき性質1 [凸拡張可能]} \\ \text{満たすべき性質2 [局所最小＝大域的最小]}\end{array}\right.$

- 満たすべき性質2′ [局所最小＝大域的最小(多項式時間版)]

$$\left\{\begin{array}{ll} f(x) \le f(x - \chi_i + \chi_j) & (i, j \in \{1, \cdots, n\}) \\ f(x) \le f(x \pm \chi_i) & (i \in \{1, \cdots, n\}) \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(x) \le f(y) \ \ (y \in \mathbf{Z}^n)$$

($\because$ 公理より)



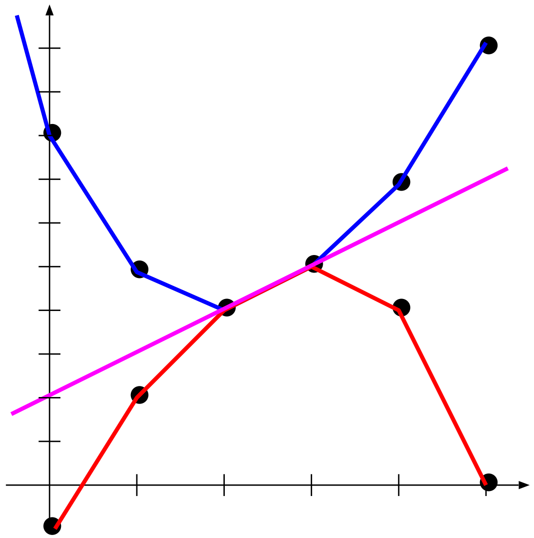
- 満たすべき性質3′ [離散分離定理(整数版)]

f : 整数値M♮凸関数, g : 整数値M♮凹関数,

$f(x) \ge g(x) \ \ (x \in \mathbf{Z}^n)$

$\Longrightarrow \ \exists p \in \mathbf{Z}^n, \ \alpha \in \mathbf{Z}$ s.t.

$$f(x) \ge p^\top x + \alpha \ge g(x) \ \ (x \in \mathbf{Z}^n)$$



○●○● L 凸関数 ●○●○

- L 凸関数は L$^\natural$ 凸関数と等価な概念

- $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は **L 凸関数**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} \text{劣モジュラ性 — } f(x)+f(y) \geq f(x \wedge y) + f(x \vee y) \ (\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f) \\ \mathbf{1} \text{ 方向の線形性 — } \exists r \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{Z}^n\text{: } f(x+\mathbf{1}) = f(x) + r \end{cases}$

- L 凸関数の例：関数 $f(x) = \sum_{i \neq j} \varphi_{ij}(x_i - x_j)$ (φ_i, φ_{ij} は 1 変数凸関数)

○●○● L 凸性と L$^\natural$ 凸性との関係 ●○●○

- L 凸関数 f は $\mathbf{1}$ 方向の線形性をもつ

$\Longrightarrow$ f を $n-1$ 次元超平面 $\{(0,x') \mid x' \in \mathbf{R}^{n-1}\}$ に制限しても情報は失われない

$\Longrightarrow$ L$^\natural$ 凸関数

$f: \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は L$^\natural$ 凸関数

$\Longleftrightarrow$ ある L 凸関数 $\tilde{f}: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が存在して，$f(x) = \tilde{f}(0,x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$

$\Longleftrightarrow$ 並進劣モジュラ性

$$f(x) + f(y) \geq f(x \wedge (y + \alpha\mathbf{1})) + f((x - \alpha\mathbf{1}) \vee y)$$
$$(\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f,\ 0 \leq \alpha \in \mathbf{Z})$$

- L$^\natural$ 凸関数に関する定理は L 凸関数に対して言い換えが可能．逆も同様.

- M凸集合はM$^\natural$凸集合と等価な概念

$S \subseteq \mathbf{Z}^n$ は**M凸集合** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次の公理を満たす

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x, y \in \mathrm{dom}\, f,\ \forall i \in \mathrm{supp}^+(x-y): \\ \qquad x - \chi_i + \chi_j \in S,\ \ y + \chi_i - \chi_j \in S \ \ (\exists j \in \mathrm{supp}^-(x-y)) \end{array}}$$

- M凸集合は基多面体(の整数点集合)に一致
- $S \subseteq \{0,1\}^n$ のときはマトロイドの基族に一致

- 例：ネットワークフローの境界の集合

グラフ $G = (V, E)$ および各枝でのフローの上下限値 $\ell_e \leq \xi_e \leq u_e$ が与えられたとき，
$S = \{\partial\xi \in \mathbf{Z}^n \mid \ell_e \leq \xi_e \leq u_e \ (e \in E),\ \xi \in \mathbf{Z}^E\}$ はM凸集合

$$((\partial\xi)_v \equiv \textstyle\sum\{\xi_e \mid e \text{ は } v \text{ から出る}\} - \sum\{\xi_e \mid e \text{ は } v \text{ に入る}\})$$

- 多面体的表現 —

$\exists\rho : 2^N \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$: $S = \{x \in \mathbf{Z}^n \mid x(X) \leq \rho(X) \ (X \subseteq N),\ x(N) = \rho(N)\}$

- M凸関数はM$^\natural$凸関数と等価な概念

$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は**M凸関数** $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次の公理を満たす

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x, y \in \mathrm{dom}\, f,\ \forall i \in \mathrm{supp}^+(x-y): \\ \qquad f(x) + f(y) \geq f(x - \chi_i + \chi_j) + f(y + \chi_i - \chi_j)\ (\exists j \in \mathrm{supp}^-(x-y)) \end{array}}$$

※ $\mathrm{dom}\, f$ は超平面 $\{x \in \mathbf{Z}^n \mid x(N) = r\}$ (r: ある整数) に含まれる

- 例１：分離凸関数を超平面 $\{x \in \mathbf{Z}^n \mid x(N) = 0\}$ 上に制限したものはM凸関数

- 例２：グラフ$G = (V, E)$および凸関数 φ_e $(e \in E)$ が与えられたとき,

$$f(x) = \min\{\sum_{e \in E} \varphi_e(\xi_e) \mid \partial\xi = x,\ \xi \in \mathbf{Z}^E\}\ (x \in \mathbf{Z}^N)$$

はM凸関数

○●○●　M凸性とM$^\natural$凸性との関係　●○●○

- M凸関数f の定義域は$n-1$次元超平面 $\{x \in \mathbf{Z}^n \mid x(N) = r\}$ に含まれる

$\Longrightarrow$ f を$(n-1)$次元超平面 $\{(0, x') \mid x' \in \mathbf{R}^{n-1}\}$ に射影しても情報は失われない

$\Longrightarrow$ M$^\natural$凸関数

$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ はM$^\natural$凸関数

$\Longleftrightarrow$ ある M凸関数$\tilde{f} : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が存在して,

$$\tilde{f}(x_0, x) = \begin{cases} f(x) & (x_0 + x(V) = 0) \\ +\infty & (x_0 + x(V) \neq 0) \end{cases}$$

- M$^\natural$凸関数に関する定理はM凸関数に対して言い換えが可能．逆も同様.

○●○● $\mathrm{L}^\natural_2$ 凸性 ●○●○

関数の畳み込み(convolution) — $f(x) = \inf\{f_1(y_1) + f_2(y_2) \mid y_1 + y_2 = x\}$

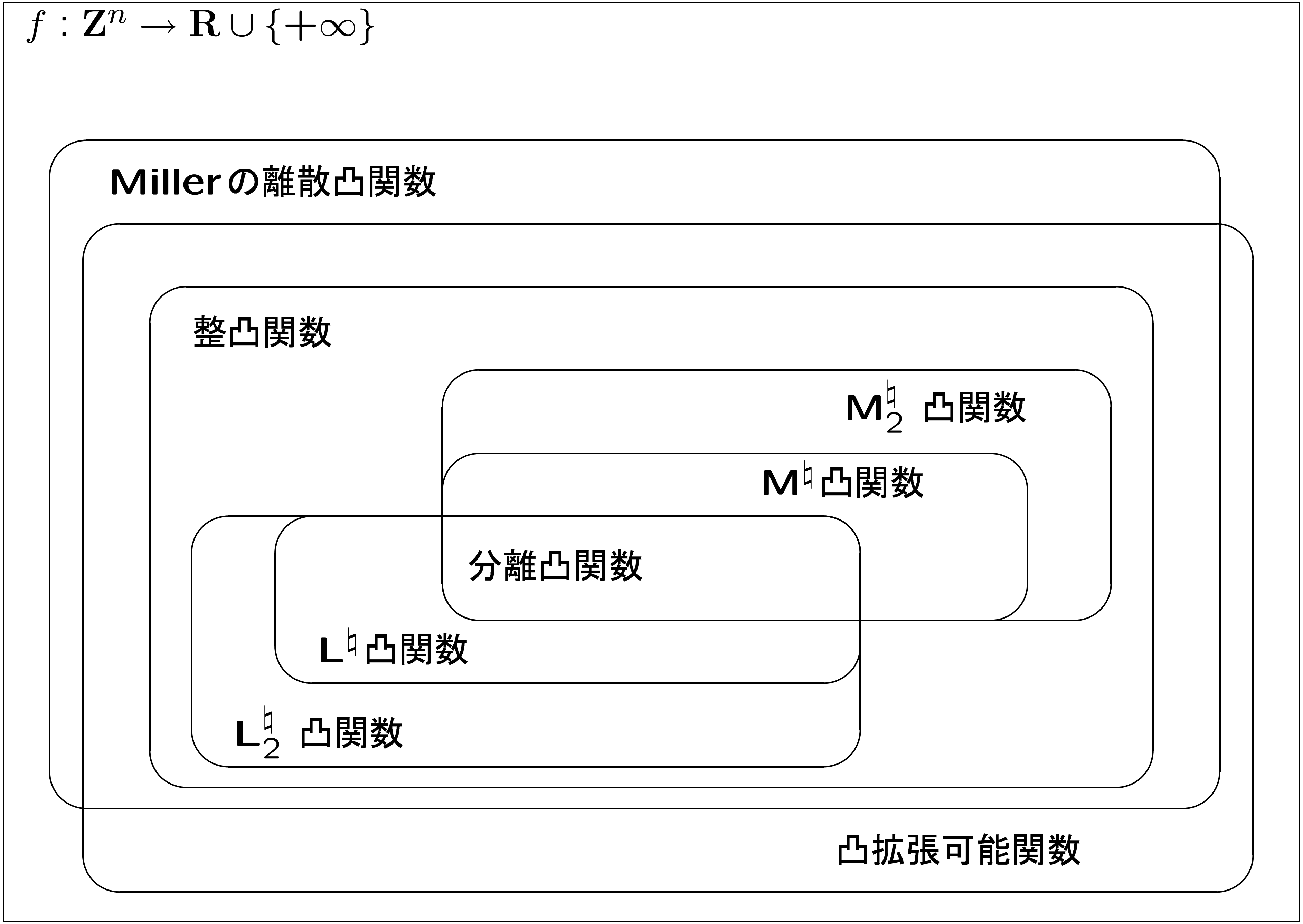
- (普通の)凸関数の畳み込みは凸関数
- $\mathrm{L}^\natural$凸関数の畳み込みは$\mathrm{L}^\natural$凸関数とは限らない$\Longrightarrow$ **$\mathrm{L}^\natural_2$ 凸関数**
- $\mathrm{L}^\natural_2$ 凸関数は整凸関数$\Longrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{満たすべき性質１ [凸拡張可能]} \\ \text{満たすべき性質２ [局所最小＝大域的最小]} \end{array} \right.$
- 「満たすべき性質2′ [局所最小＝大域的最小(多項式時間版)]」が成り立つ
- 「満たすべき性質３ [離散分離定理]」 は不成立

※ $\mathrm{L}^\natural$凸関数の和は $\mathrm{L}^\natural$凸関数

○●○● $\mathrm{M}^\natural_2$ 凸性 ●○●○

- (普通の) 凸関数の和は凸関数
- $\mathrm{M}^\natural$ 凸関数の和は $\mathrm{M}^\natural$ 凸関数とは限らない $\Longrightarrow$ **$\mathrm{M}^\natural_2$ 凸関数**
- $\mathrm{M}^\natural_2$ 凸関数は整凸関数 $\Longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\text{満たすべき性質１ [凸拡張可能]}\\ \text{満たすべき性質２ [局所最小＝大域的最小]}\end{array}\right.$
- 「満たすべき性質 $2'$ [局所最小＝大域的最小 (多項式時間版)]」が成り立つ
- 「満たすべき性質３ [離散分離定理]」 は不成立

※ $\mathrm{M}^\natural$ 凸関数の畳み込みは $\mathrm{M}^\natural$ 凸関数


$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$
Millerの離散凸関数
整凸関数
$\mathrm{M}_2^\natural$ 凸関数
$\mathrm{M}^\natural$凸関数
分離凸関数
$\mathrm{L}^\natural$凸関数
$\mathrm{L}_2^\natural$ 凸関数
凸拡張可能関数