離散凸解析入門
—M凸関数とL凸関数—

塩浦昭義
（東北大学大学院情報科学研究科）
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp
http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura

離散凸解析の概要

- 最適化問題（数理計画問題）
  与えられた解集合Sから
  与えられた関数 f を最小化（最大化）する解を求める

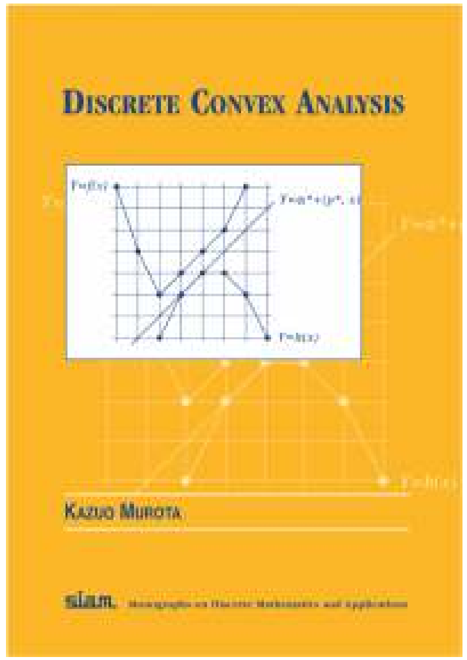
$$\text{Minimize } f(x) \text{ subject to } x \in S$$

Sが実数ベクトル集合➔連続最適化

Sが整数ベクトル集合➔離散最適化

離散凸解析の本

室田一雄
離散凸解析
共立叢書 現代数学の潮流,
共立出版　2001



Kazuo Murota
Discrete Convex Analysis
SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Vol. 10,
Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia 2003

離散凸解析の概要

- 連続最適化問題の例

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & x^3 - 3xy \\ \text{subject to} & 2x^2 + (y-4)^2 \leq 5 \\ & -3 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq 2 \\ & x, y \in \mathbf{R} \end{array}$$

- 離散最適化問題の例

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & 2x + 3y + 5z \\ \text{subject to} & 4x + y + 7z \geq 9 \\ & x, y, z \in \{0, 1\} \end{array}$$

離散凸解析の概要

解きやすい

連続最適化

線形計画
凸2次計画
半正定値計画
2次錘計画
凸計画

最小全域木問題
最短路問題
最大流問題
最小費用流問題

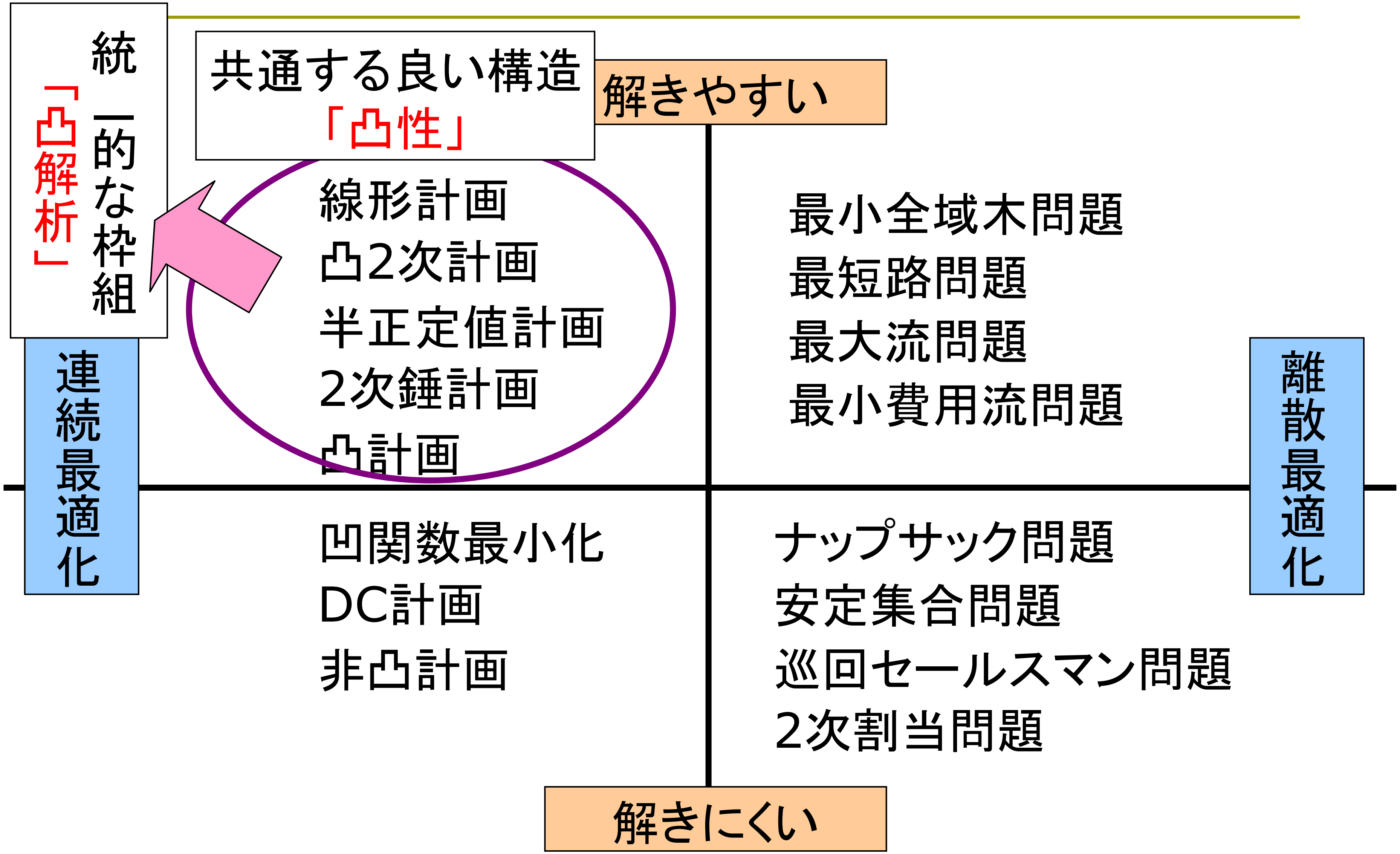
離散最適化

凹関数最小化
DC計画
非凸計画

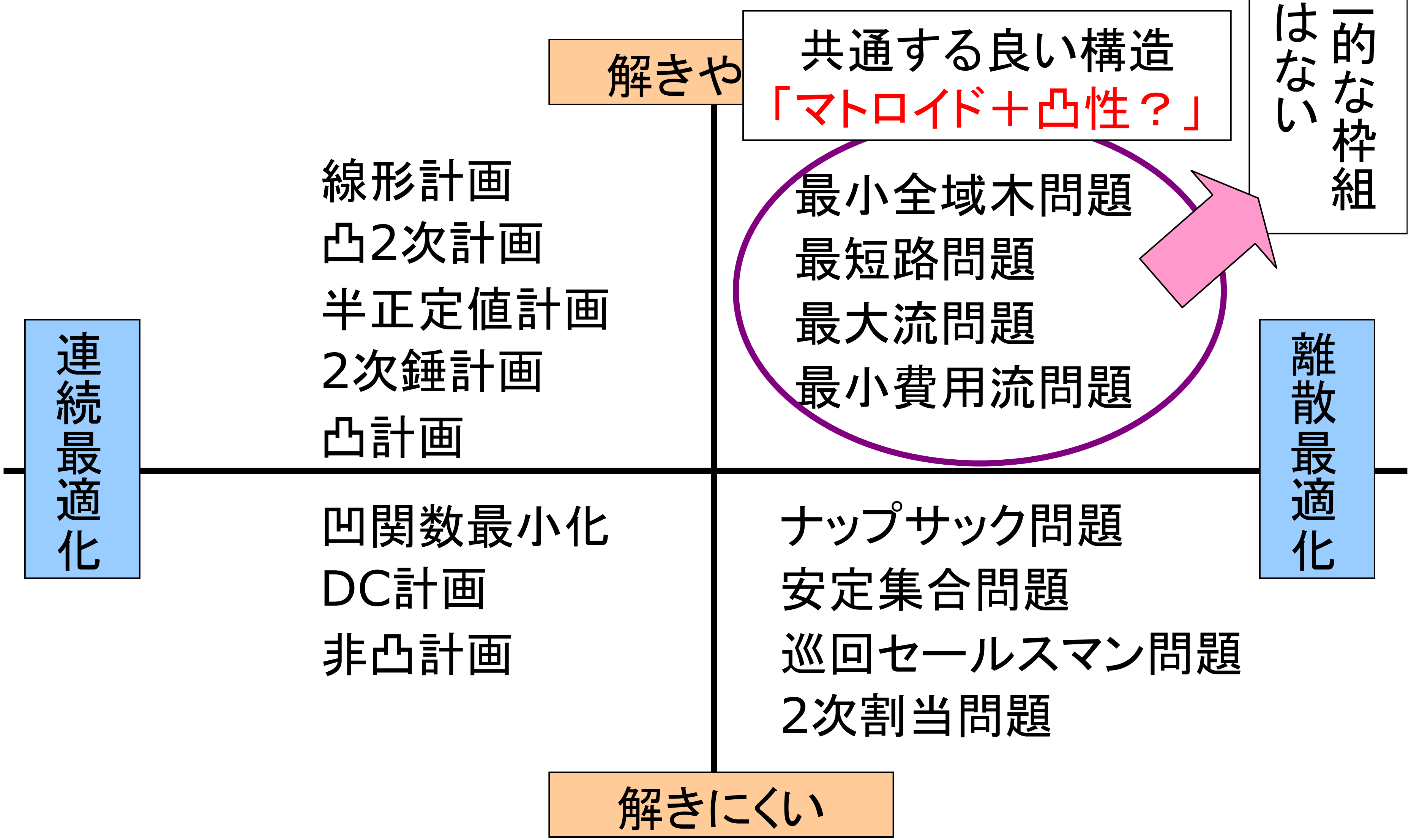
ナップサック問題
安定集合問題
巡回セールスマン問題
2次割当問題

解きにくい

離散凸解析の概要


統一的な枠組
「凸解析」
共通する良い構造
「凸性」
解きやすい
解きにくい
連続最適化
離散最適化
線形計画
凸2次計画
半正定値計画
2次錘計画
凸計画
最小全域木問題
最短路問題
最大流問題
最小費用流問題
凹関数最小化
DC計画
非凸計画
ナップサック問題
安定集合問題
巡回セールスマン問題
2次割当問題

離散凸解析の概要


統一的な枠組はない
解きや
共通する良い構造
「マトロイド＋凸性？」
線形計画
凸2次計画
半正定値計画
2次錘計画
凸計画
最小全域木問題
最短路問題
最大流問題
最小費用流問題
連続最適化
離散最適化
凹関数最小化
DC計画
非凸計画
ナップサック問題
安定集合問題
巡回セールスマン問題
2次割当問題
解きにくい

離散凸解析の概要

解きやすい離散最適化問題
（貪欲に解ける,
多項式時間で解ける）

共通する構造：離散凸性

組合せ論からの視点
マトロイド理論

統一的枠組

解析的な視点
凸解析

離散凸解析

離散凸解析の概要

- 離散凸解析の目標
  - 「離散凸」にふさわしい概念を見いだす
    - (ポリ)マトロイド　➔交換公理　➔M凸($M^\natural$凸)性
    - 劣モジュラ集合関数➔劣モジュラ性➔L凸($L^\natural$凸)性
  - 通常の凸解析における諸定理の離散版を確立する
    - 最小性基準，共役性，双対定理，など
  - 離散最適化のアルゴリズムを体系的に構成する
    - 関数最小化アルゴリズムなど

講義の内容

- M凸性, L凸性が離散凸性としてふさわしい概念であることを説明
  - 通常の凸関数との比較
  - 他の離散凸性との比較
    - Miller の discretely convex function (1971)
    - Favati-Tardella の integrally convex function (1990)