Efficiently Pricing European-Asian Options — Ultimate Implementation and Analysis of the AMO Algorithm —

塩浦昭義（東北大学）
徳山豪（東北大学）

本研究の目的と結果

- オプション：典型的な金融派生商品
- 2項モデルでのオプション価格の計算：一般に#P困難
- 目的：ヨーロピアン・アジアンオプションの価格の近似
- 既存のアルゴリズム —太田-定兼-塩浦-徳山 (2002)

時間　$O(kn^2)$　誤差　$O\left(\frac{n^{\frac{1}{4}}X}{k}\right)$

（X, n：問題の入力パラメータ、k：任意の正整数）

- 提案する近似アルゴリズム

時間　$O(kn^2)$　誤差　$O\left(\frac{X}{k}\right)$

発表の流れ（前半）

- オプションとは
- ヨーロピアン・アジアンオプション
- オプションの価格付けと2項モデル
- 既存の近似アルゴリズム
- 本研究の結果

オプションとは？

オプション：ある資産(株式、債権、通貨など)を
将来のある時点(満期)で
所定の価格(行使価格)で売買する権利
(義務ではない)

コール：買う権利, プット：売る権利

例：ヤフー株を年末に50万円で買う権利の
コールオプション

- 先行きの予測に応じた投資
- 価格変動リスクに対する備え(ヘッジング)

オプションのペイオフ

例：ヤフー株を年末に50万円で買う権利のオプション

- 年末に株が60万円に値上がり

  ⇒オプションを使って株を50万円で買う（行使）

  ⇒すぐに60万円で売る⇒10万円の儲け（ペイオフ）

- 年末に株が40万円に値下がり

  ⇒オプションは行使せず　⇒　ペイオフは0万円

一般に、ヨーロピアンオプションのペイオフ

$$(S - X)^{+} = \max\{S - X, 0\}$$

（S：満期での株価、　X：行使価格）

ヨーロピアン・アジアンオプション

- 本研究で扱うオプション：

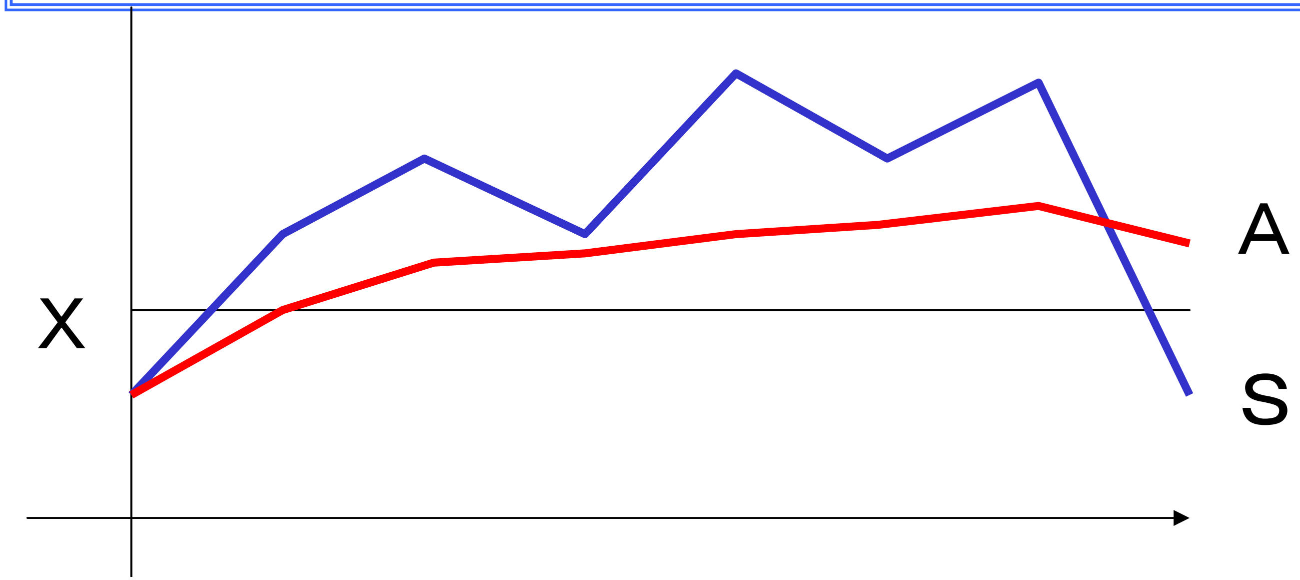
  ヨーロピアン・アジアンオプション

  －ペイオフが平均株価に依存－

ヨーロピアン・アジアンオプションのペイオフ

$$(A - X)^{+} = \max\{A - X, 0\}$$

（A：満期までの株価の平均、X：行使価格）



ペイオフが株価の変動に影響されにくい

オプション価格の評価モデル

- オプションの価格

  ＝ペイオフの期待値（から利子を割り引いたもの）

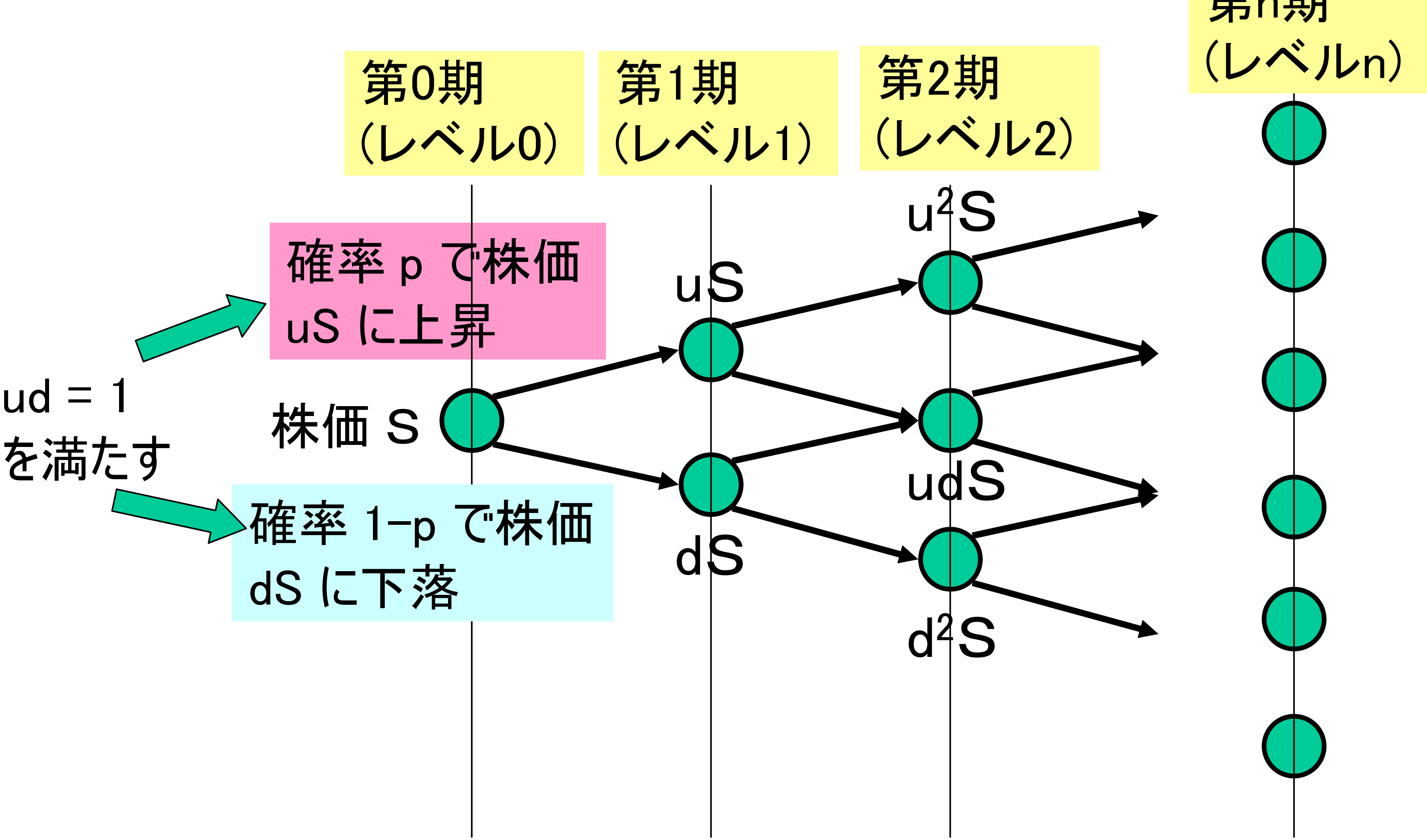
  ※この価格でないと、無リスクで儲かる方法がある

株価の動きをどう表現するか？

- ブラック-ショールズモデル　（連続モデル）
  - 株価の動きを幾何ブラウン運動により表現
  - 確率微分方程式をたて，解を求める（解析的，数値的）
- 2項モデル　（離散モデル）　←　本研究で扱う
  - 株価の動きを2項木により表現
  - DPなどによりオプション価格を計算

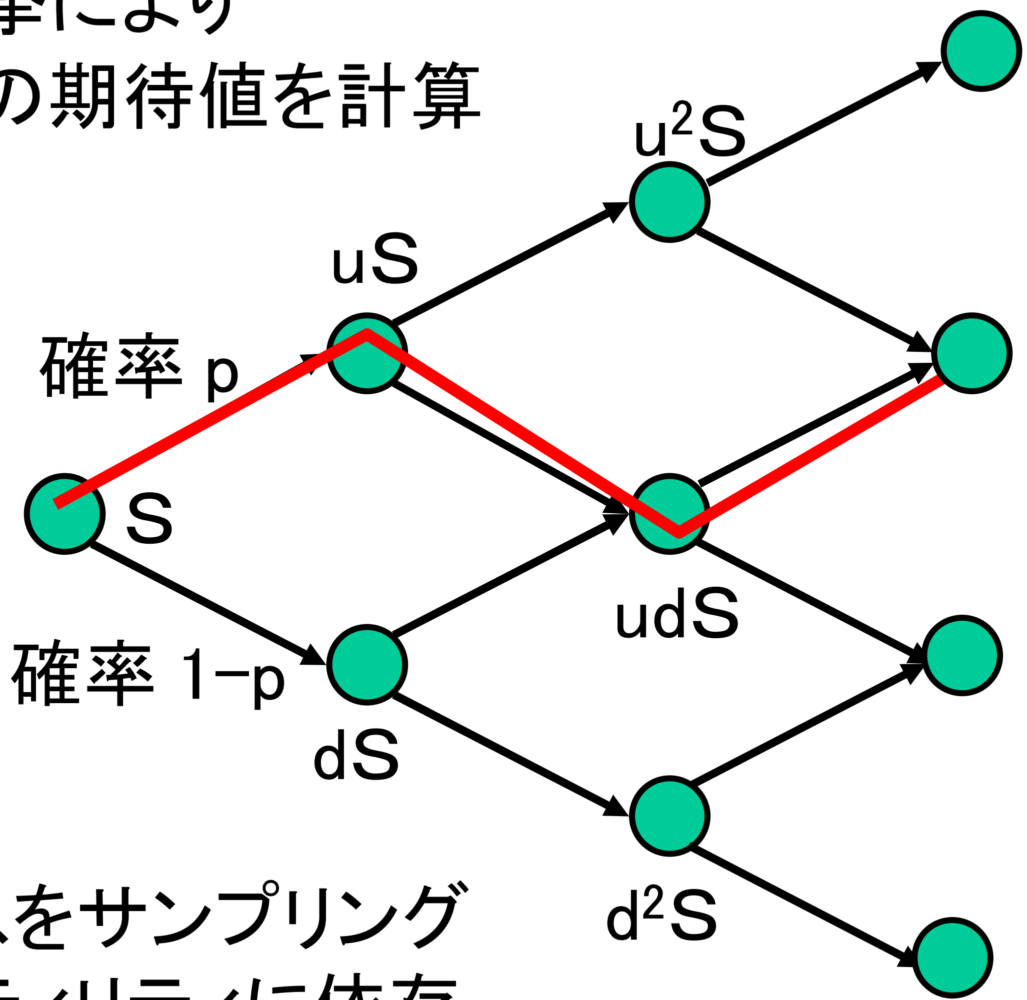
2項モデル

- 株価の動きを2項木により表現



アジアンオプション価格の計算

- 厳密値の計算
  - ■ DPもしくはパスの列挙により
    ペイオフの期待値を計算
  - ■ 指数時間を要する



- 近似値の計算
  - ■ モンテカルロ法：パスをサンプリング
    誤差がボラティィリティに依存

精度保障つき近似アルゴリズム

○ Aingworth-Motwani-Oldham (2000 SODA)

バケッティングを利用

時間 $O\left(kn^2\right)$ 誤差 $O\left(\frac{nX}{k}\right)$

（n：二項木の深さ、X: 行使価格、k：任意の正整数）

○ Dai-Huang-Lyuu (2002)

各頂点でのバケットの数を調整、誤差 $O\left(\frac{\sqrt{n}X}{k}\right)$

○ 太田-定兼-塩浦-徳山 (2002 ESA)

ランダム化 誤差 $O\left(\frac{n^{\frac{1}{4}}X}{k}\right)$

提案するアルゴリズム

Dai et al. (2002)と 太田ほか (2002)のアイディアを利用

バケットの数を調整　＋　ランダム化

誤差: $O\left(\frac{X}{k}\right)$

二項木の深さ n に依存しない!

解析が簡単！

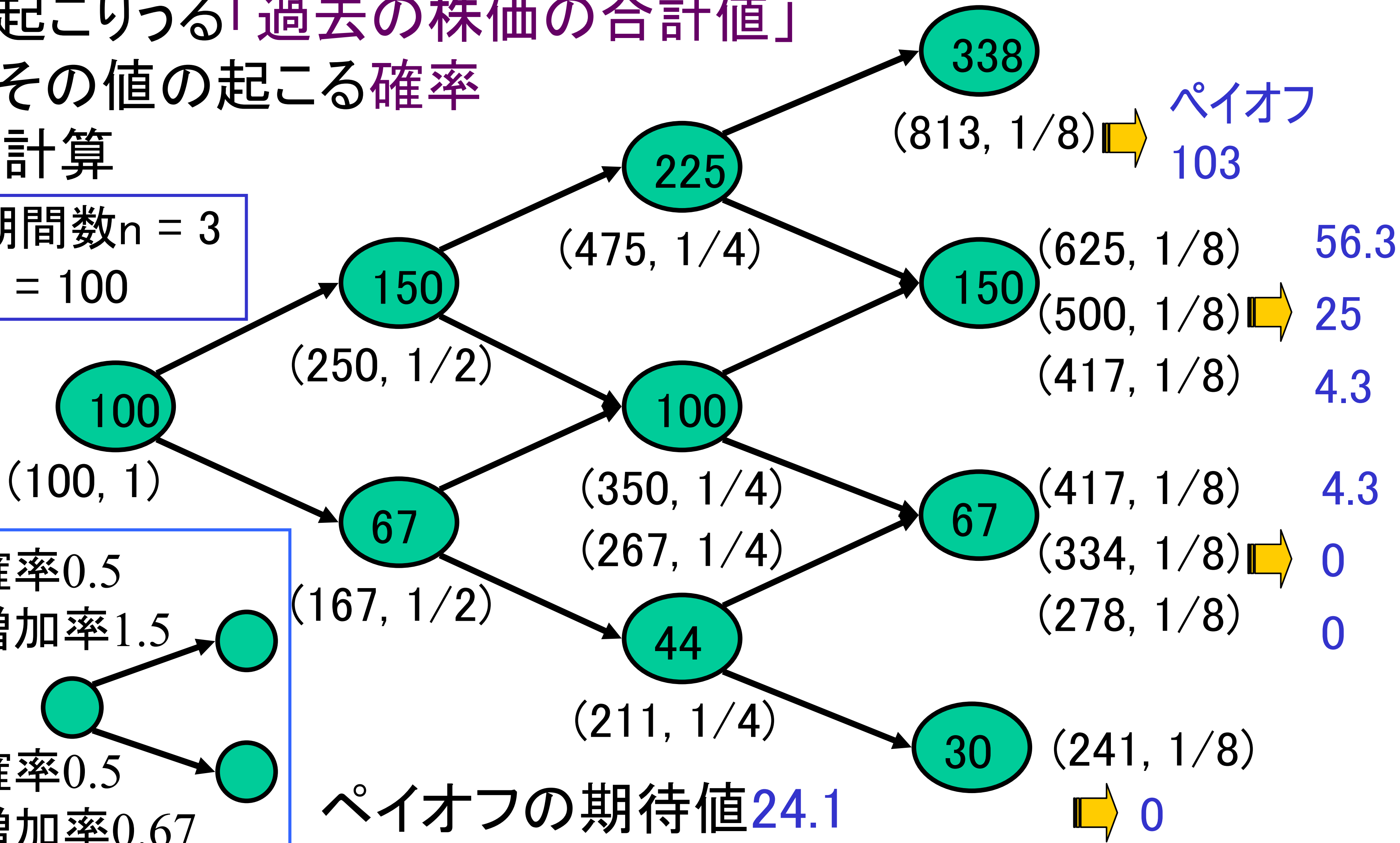
発表の流れ（後半）

- 厳密値の計算法
- 近似アルゴリズムの基本アイディア
- 既存の近似アルゴリズム
- 提案するアルゴリズム

DPによる厳密値の計算法

二項木の各頂点において、
　起こりうる「過去の株価の合計値」
　その値の起こる確率
を計算

期間数n = 3
X = 100



確率0.5
増加率1.5

確率0.5
増加率0.67

ペイオフの期待値24.1

近似アルゴリズムの基本アイディア

- DPにおいて「過去の株価の合計値」の種類数は
  非常に多くなる
  ⇒バケットを使って近似

合計値の範囲	起こりうる合計値
400 300	(310, 0.05)
300 200	(205, 0.15) (240, 0.12) (285, 0.20)
200 100	(170, 0.10) (150, 0.10) (110, 0.10)
100 0	(80, 0.05) (30, 0.01)

合計値を
切り上げ
＋
確率を
まとめる

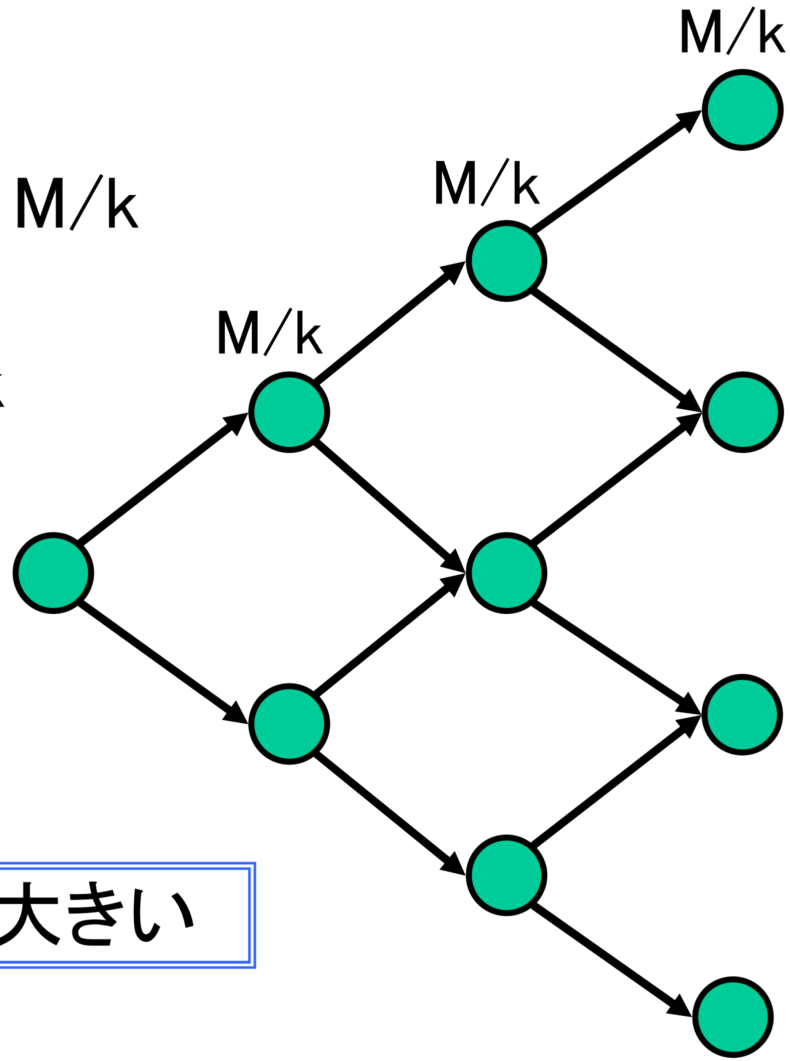
400 300	(400, 0.05)
300 200	(300, 0.47)
200 100	(200, 0.30)
100 0	(100, 0.06)

- 切り上げ⇒上界値
- 切り下げ⇒下界値

近似アルゴリズムの基本アイディア

M:「株価の合計値」の最大値
k: 各頂点で使うバケット数

- 各レベルでの合計値の誤差≦ M/k
- 全体での合計値 T の
  誤差≦ (n+1)M/k
- ペイオフ $(T/(n+1) - X, 0)^{+}$の
  誤差 ≦ M/k



M は非常に大きい値 ⇒ 誤差が大きい

AMOアルゴリズムの基本アイディア

バケットで扱う「株価の合計値」の最大値Mを小さくしたい

補題：
ある時点 i で「株価の合計値」Tが十分大きい（≧ (n+1)X）
⇒ ◦ 満期でオプションは必ず行使される
◦ 満期でのペイオフの条件付期待値は
簡単に計算できる

⇒ M を (n+1)X に置き換えられる
誤差は (n+1) X/k

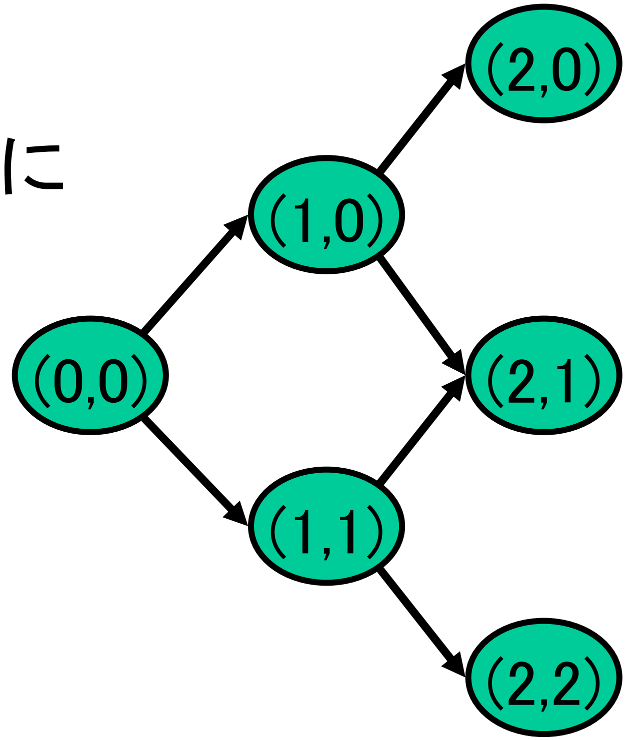
Dai et al. の基本アルゴリズムのアイディア

- ○k_{ij}: 頂点(i , j)のバケット数
- ○バケットの総数 $\sum k_{ij} = O(kn^2)$ を変えずに k_{ij}を調整、誤差を最小化

$$k_{ij} = kn^2 \times \frac{\sqrt{\omega(i,j)}}{\sum_{i',j'} \sqrt{\omega(i',j')}}$$

⇒誤差 $O\left(\frac{\sqrt{n}X}{k}\right)$

解析が複雑



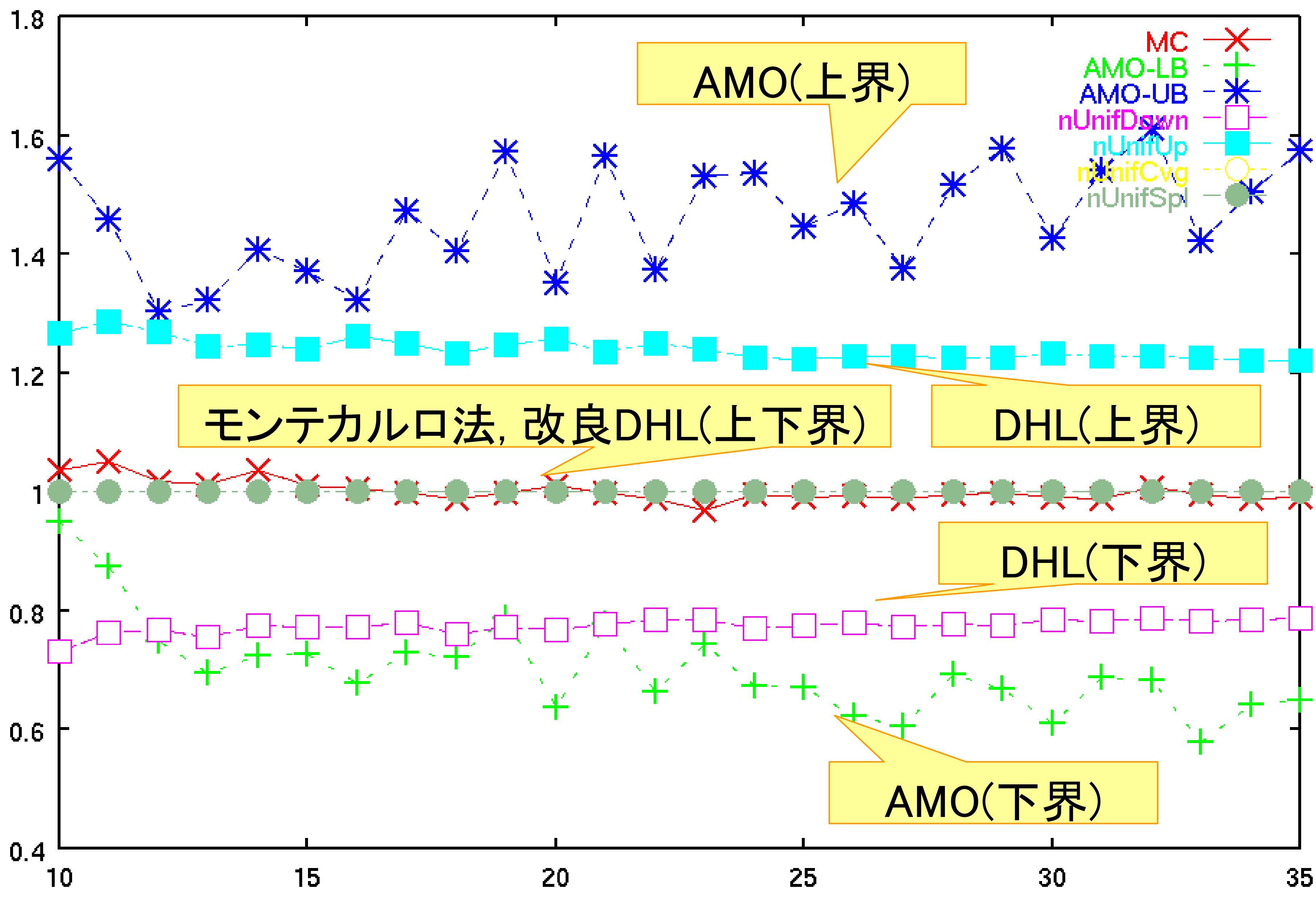
$$\omega(i,j) = {}_iC_j\, p^{i-j}(1-p)^j$$

二項木の根から頂点(i , j)に到達する確率

Dai et al. の改良アルゴリズムのアイディア

- 基本アルゴリズム ＋ ヒューリスティック
- 改良アルゴリズム(上界)
  切り上げと切り下げを同時に行う
- 改良アルゴリズム(下界)
  「株価の合計値」の平均値で近似

- 誤差の理論的なバウンドは変わらず
- 実験的には誤差がかなり小さい



AMO(上界)
MC
AMO-LB
AMO-UB
nUnifDown
nUnifUp
nUnifCvg
nUnifSpl
モンテカルロ法, 改良DHL(上下界)
DHL(上界)
DHL(下界)
AMO(下界)
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
10
15
20
25
30
35

太田らのアルゴリズムのアイディア

- バケットに入っている「株価の合計値」をランダムに選び、その値により近似
- 「株価の合計値」の起こる確率の大小をふまえて選択

合計値の範囲	起こりうる合計値
400 300	(310, 0.05)
300 200	(205, 0.15) (240, 0.12) (285, 0.20)
200 100	(170, 0.10) (150, 0.10) (110, 0.10)
100 0	(80, 0.05) (30, 0.01)

確率15/47
確率12/47
確率20/47

400 300	(400, 0.05)
300 200	(205, 0.47)
200 100	(170, 0.30)
100 0	(80, 0.06)

太田らのアルゴリズムの解析

アルゴリズムの振る舞いを確率過程と見なす

⇒　マルチンゲール

各頂点で「株価の合計値」をランダム選択をしたときの誤差への影響の期待値＝０

⇒Azuma の不等式(1967)を適用

ほぼ1の確率で誤差 $\dfrac{c\sqrt{\Gamma_p(n)}X}{k}$ $\left(\begin{array}{c} \Gamma_p(n) = \sum_{i,j} \omega(i,j)^2 \\ \omega(i,j) = {}_i\mathrm{C}_j\, p^{i-j}(1-p)^j \end{array} \right)$

$\Gamma_p(n) = O(\sqrt{n})$より　$\dfrac{cn^{\frac{1}{4}}X}{k}$

解析が複雑

提案するアルゴリズム

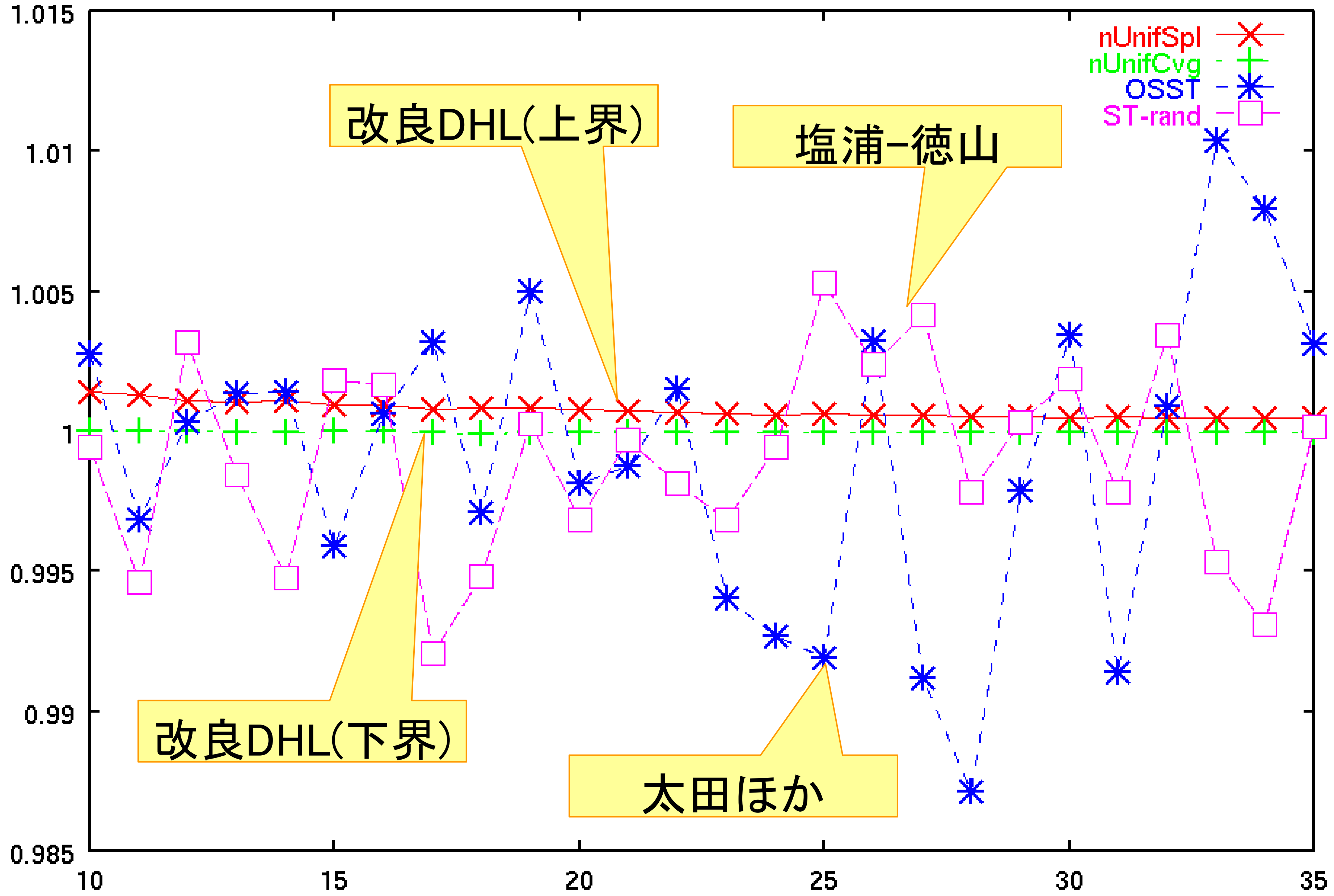
- ○ 太田らのランダム化アルゴリズム
  ＋Dai et al. のアイディア

- ○ 各項点で使うバケット数 k_{ij} を調整
  バケットの総数を増やさないように誤差を最小化

誤差は(高い確率で) $$cX\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i}\left[\frac{\omega(i,j)}{k_{ij}}\right]^2}$$

$$k_{ij} = kn^2 \times \frac{\omega(i,j)}{\sum_{i',j'}\omega(i',j')}$$ のとき 誤差は最小 $$\frac{cX}{k}$$

解析は簡単！

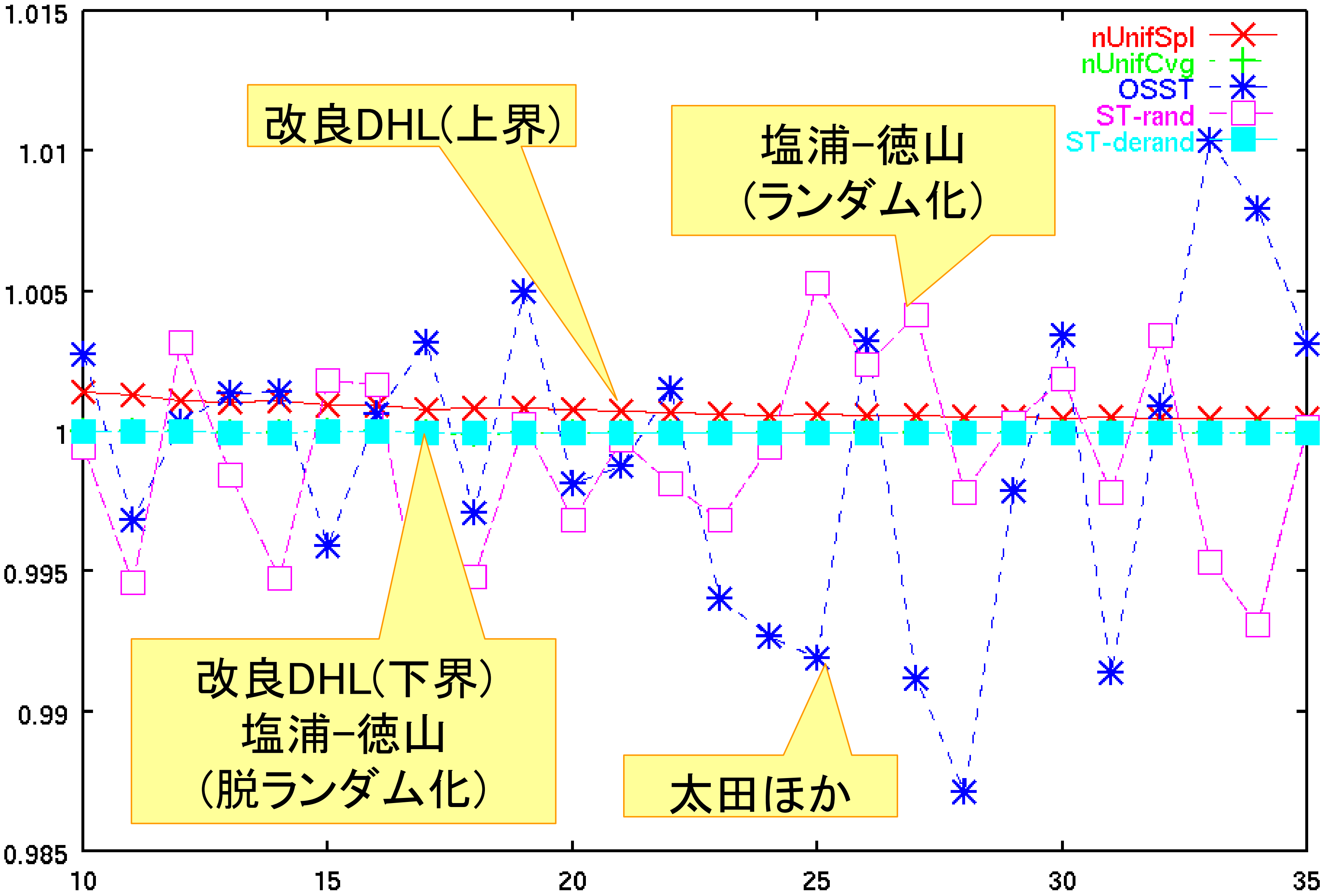


nUnifSpl
nUnifCvg
OSST
ST-rand
改良DHL(上界)
塩浦−徳山
改良DHL(下界)
太田ほか
1.015
1.01
1.005
1
0.995
0.99
0.985
10
15
20
25
30
35

Dai et al. の改良アルゴリズムとの関係

○　我々のランダム化アルゴリズム
　　ランダムに選ばれた「株価の合計値」により近似
　　⇒「株価の合計値」の平均値により近似することで
　　　　脱ランダム化
　　⇒ Dai et al. の改良アルゴリズム(下界)とほぼ一致
　　　　良い近似精度に対する理由付け

○誤差のバウンド
　　■理論：nX/kしか証明できていない
　　　　　　X/k が成り立つかどうかは不明
　　■実験：非常に小さい、n に依存しない


1.015
1.01
1.005
1
0.995
0.99
0.985
10
15
20
25
30
35
nUnifSpl
nUnifCvg
OSST
ST-rand
ST-derand
改良DHL(上界)
塩浦−徳山
(ランダム化)
改良DHL(下界)
塩浦−徳山
(脱ランダム化)
太田ほか

今後の課題

- 脱ランダム化アルゴリズムの誤差解析
- アメリカン･アジアンオプションの近似アルゴリズム