離散的な凸関数とはどうあるべきか？
── 離散最適化の視点から ──

平成14年5月11日(土)
日本ＯＲ学会 「アルゴリズムと最適化」研究部会

塩浦 昭義 （東北大学大学院 情報科学研究科）

○ ● ○ ●　発表の概要 (その1)　● ○ ● ○

最適化問題 (数理計画問題)

— 与えられた解集合 S の中で,

与えられた関数 f を最小化 (最大化) するものを求める問題

Minimize　$f(x)$　subject to　$x \in S$

特に,

$S \subseteq \mathbf{R}^n$, f の定義域 $\subseteq \mathbf{R}^n$ $\Longrightarrow$ 連続最適化問題

$S \subseteq \mathbf{Z}^n$, f の定義域 $\subseteq \mathbf{Z}^n$ $\Longrightarrow$ 離散最適化問題

○ ● ○ ● 発表の概要 (その2) ● ○ ● ○

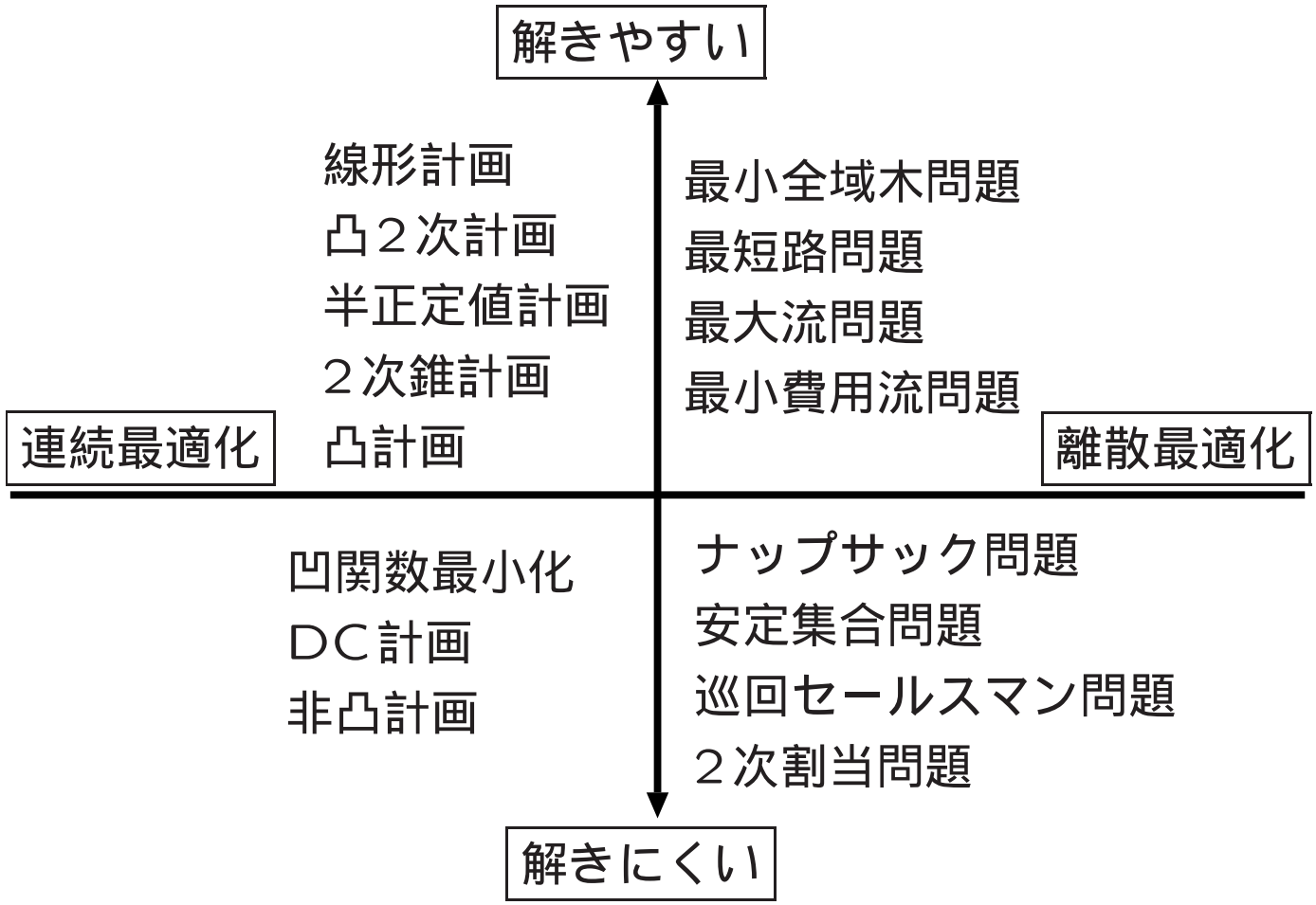
例 1 : 非線形計画問題 ── 連続最適化問題のひとつ

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & x^2 - 2y^2 \\
\text{subject to} & 3x + y \geq 5 \\
& -x + 4y \geq 1 \\
& x \geq 0,\ y \geq 0 \\
& x, y \in \mathbf{R}
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{l}
f(x, y) = x^2 - 2y^2 \\
S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x + y \geq 5, \\
\qquad\qquad -x + 4y \geq 1,\ (x, y) \geq 0\}
\end{array}
$$

例2: ナップサック問題 ── 離散最適化問題のひとつ

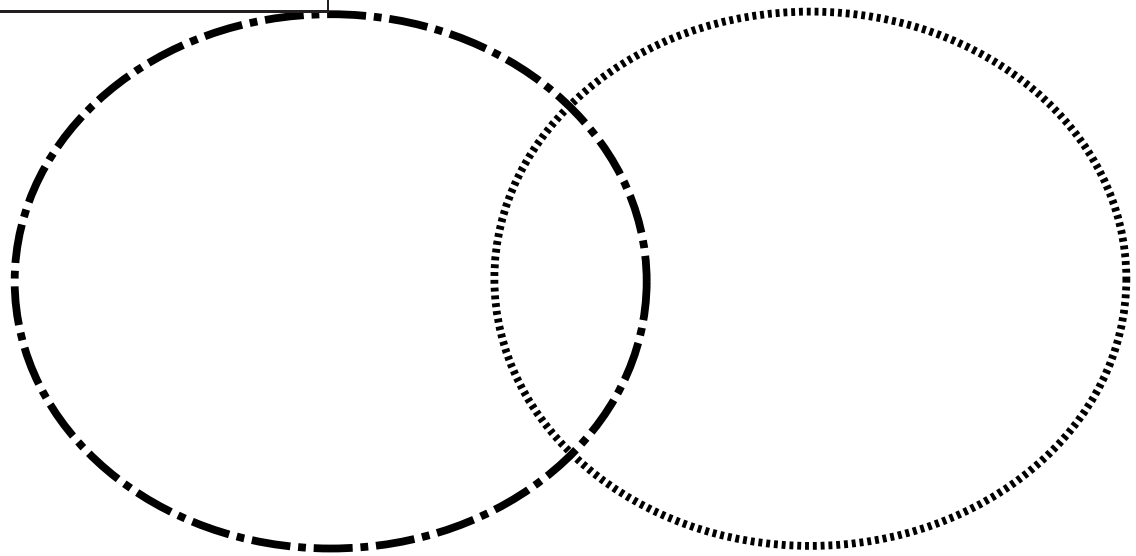
$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & 2x + 3y + 5z \\
\text{subject to} & 4x + y + 7z \geq 9 \\
& x, y, y \in \{0, 1\}
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{l}
f(x, y, z) = 2x + 3y + 5z \\
S = \{(x, y, z) \in \{0, 1\}^3 \mid 4x + y + 7z \geq 9\}
\end{array}
$$

発表の概要 (その3)


解きやすい
線形計画
凸２次計画
半正定値計画
２次錐計画
凸計画
最小全域木問題
最短路問題
最大流問題
最小費用流問題
連続最適化
離散最適化
凹関数最小化
DC計画
非凸計画
ナップサック問題
安定集合問題
巡回セールスマン問題
２次割当問題
解きにくい

共有する良い構造
「凸性」

共有する良い構造は？
「離散凸性」？



○ ● ○ ●　発表の概要 (その4)　● ○ ● ○

- 「解きやすい」離散最適化問題に現れる良い構造を捉えるための試み
  $\longrightarrow$ 「離散凸性」(離散凸集合, 離散凸関数) という視点
  集合 $S \subseteq \mathbf{Z}^n$, 関数 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ に対する凸性

- 様々な離散凸性の提案
  - 離散凸 (Miller 1971),
  - 整凸 (Favati–Tardella 1990),
  - M凸/L凸 (室田 1996, 1998), などなど

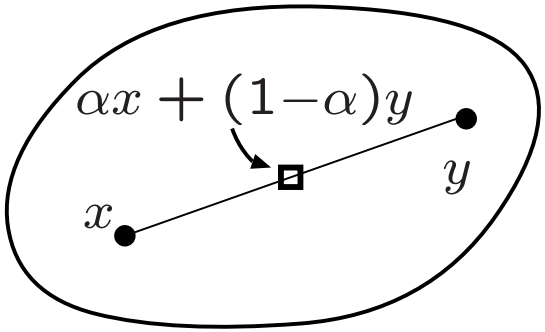
これらは「離散凸性」として十分にふさわしいか概念か? — 必ずしもそうではない!

- 本発表の内容
  - 凸集合と凸関数の性質 (復習)
  - 離散凸性はどのような性質を満たすべきか?
  - 既存の離散凸性の紹介
  - 今後の展望

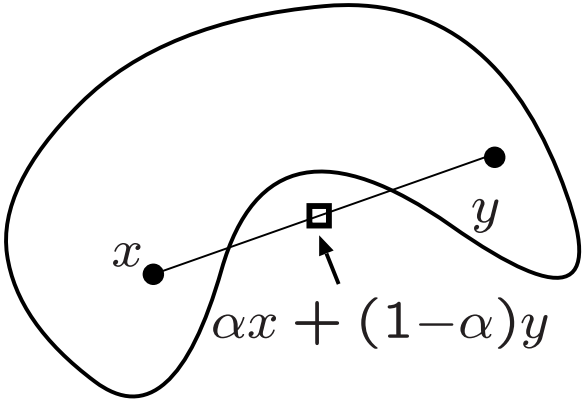
凸集合と凸関数の定義 (その1)

- 凸集合の定義

集合 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ は凸集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in S,\ 0 \leq \forall \alpha \leq 1\colon\ \alpha x + (1-\alpha) y \in S$



凸集合



非凸集合

凸集合と凸関数の定義 (その2)

- 凸関数の定義

今後扱う関数は $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ の形

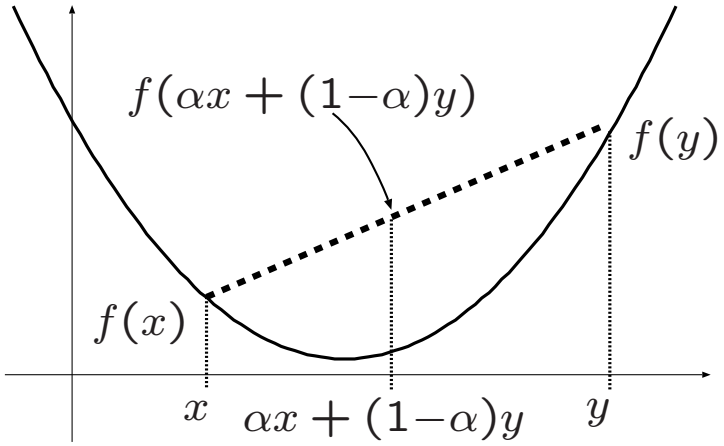
例 — f : 区間 $[0,5]$ 上で定義された関数, $f(x) = x^2 + 3$

$$\Longrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & (x \in [0,5]) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

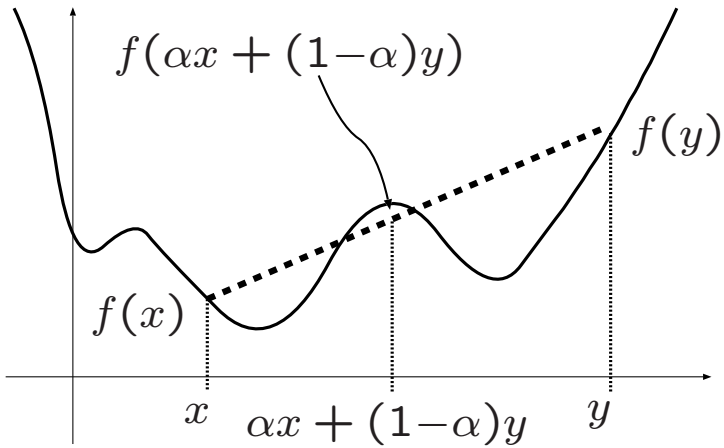
(実効) 定義域 $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$

関数 f は**凸関数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in \operatorname{dom} f,\ 0 \le \forall \alpha \le 1$:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$



凸関数



非凸関数

○ ● ○ ●　凸集合と凸関数の定義 (その3)　● ○ ● ○

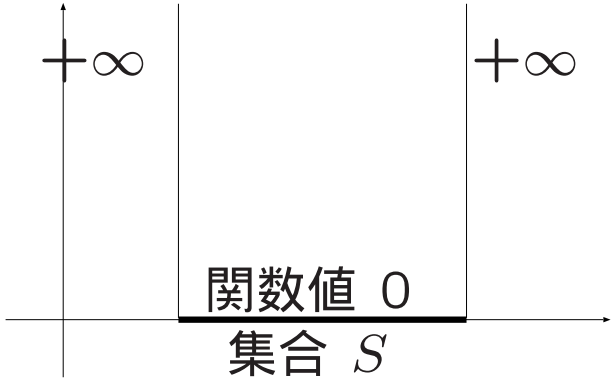
- 凸集合と凸関数の関係

性質1: 集合 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ は凸集合

$\Longleftrightarrow$ S の標示関数 $\delta_S : \mathbf{R}^n \to \{0, +\infty\}$

$$\delta_S(x) = \begin{cases} 0 & (x \in S) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

は凸関数



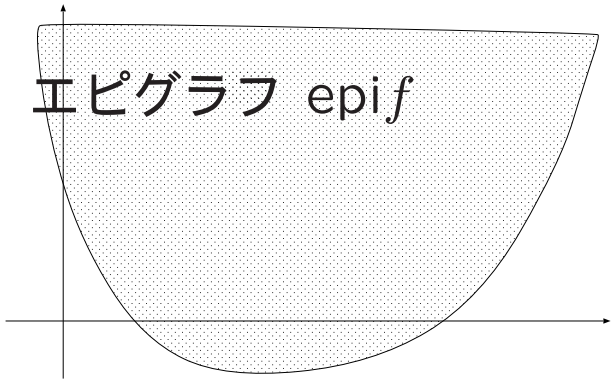
$\therefore$ 凸集合は凸関数の特殊ケース

性質2: 関数 f は凸関数

$\Longleftrightarrow$ f のエピグラフ

$$\mathrm{epi} f = \{(x, \alpha) \mid x \in \mathbf{R}^n, \alpha \in \mathbf{R}, f(x) \leq \alpha\}$$

は凸集合

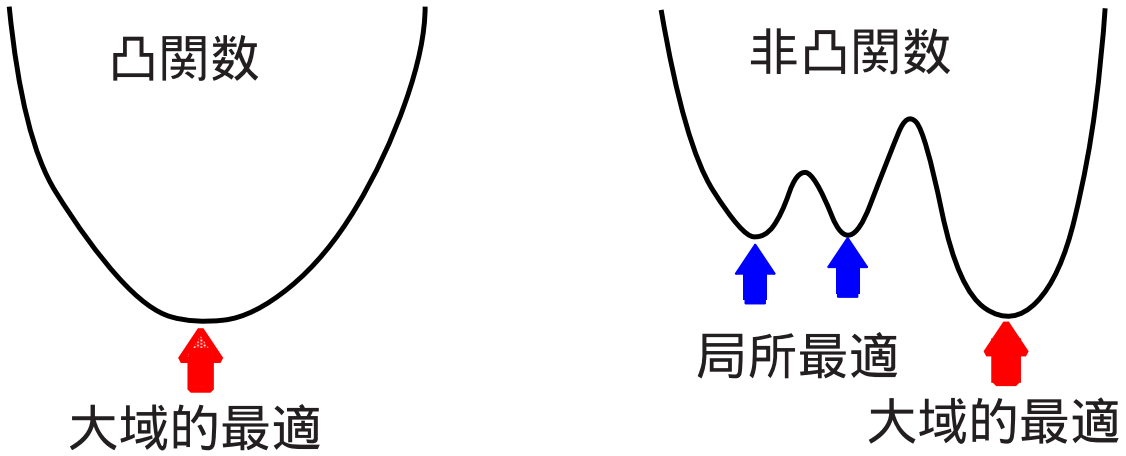


凸関数の性質 (その1)

定理 1 [局所最小 = 大域的最小]

f: 凸関数, $x \in \mathrm{dom}\, f$, $\mathrm{N}(x)$: x の近傍

$f(x) \leq f(y)\ (y \in \mathrm{N}(x)) \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y)\ (y \in \mathbf{R}^n)$

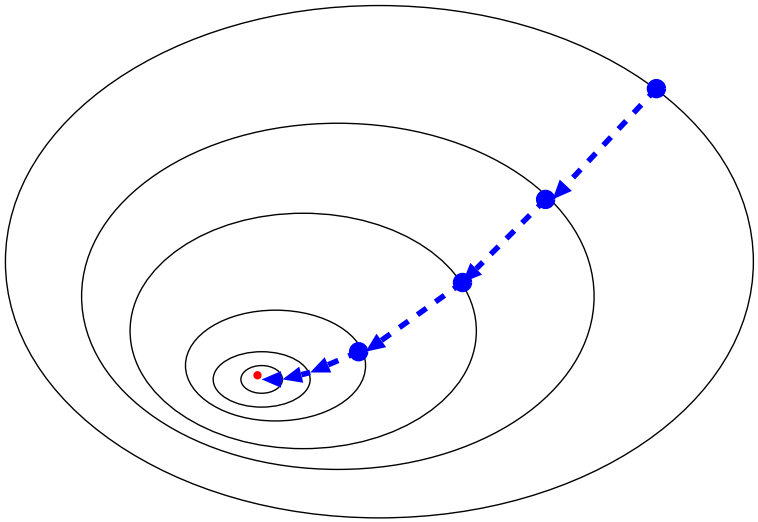


∴ 凸関数の最小化問題に降下法が適用可!

繰り返す
- ○ 現在の点の近傍を調べる
- ○ 近傍内でより関数値の小さい点に移動

$\Longrightarrow$ 最小解に収束

$\longrightarrow$ 凸性をもつ問題は「解きやすい」



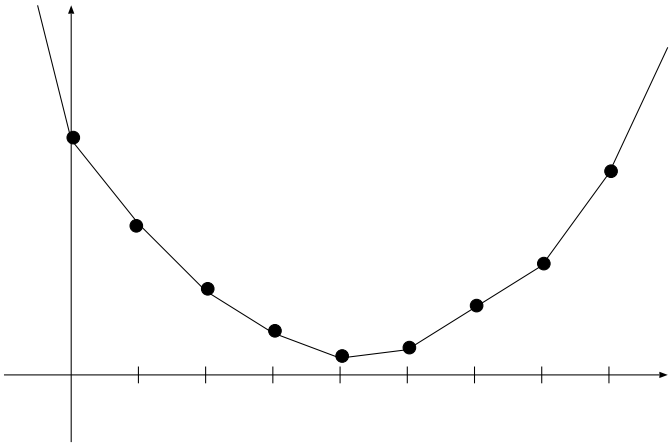
離散凸性の満たすべき性質 (その1)

- 離散凸性 ($S \subseteq \mathbf{Z}^n$, $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ に対する凸性)
  はどのように定義すべきか?

- $\mathbf{Z}$ 上で定義された関数 $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ の場合

  f は離散凸

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f の関数値を結んで得られる関数
  $\overline{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が凸関数
  (普通の凸関数に拡張可能)



この定義は自然, 誰もが納得

一般に, $\mathbf{Z}^n$ 上で定義された関数 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ の場合は?

分離凸関数: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$, 各 $f_i : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ は離散凸

— 様々な良い性質を満たす. しかし, とても特殊すぎる関数

— 集合版は超直方体 $\{x \in \mathbf{Z}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \ (\forall i)\}$

離散凸性の満たすべき性質 (その2)

離散凸関数の満たすべき性質1[凸拡張可能性]

「離散凸関数」 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ に対し,

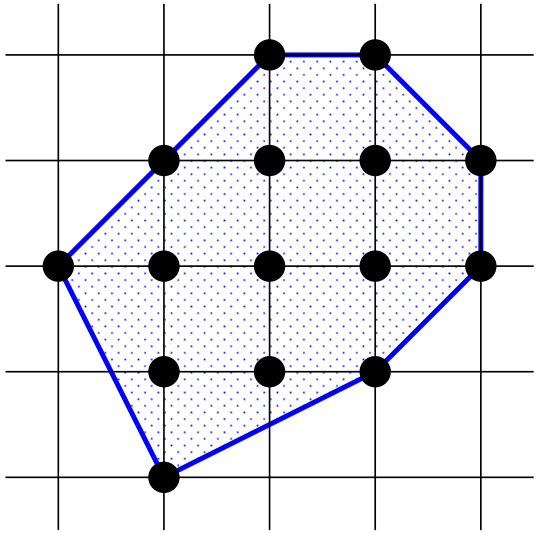
ある凸関数 $\overline{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が存在して, $\overline{f}(x) = f(x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$

離散凸集合の満たすべき性質1[凸拡張可能性]

「離散凸集合」 $S \subseteq \mathbf{Z}^n$ に対し,

その凸包 $\overline{S}$ が $\overline{S} \cap \mathbf{Z}^n = S$ を満たす

(S に穴がない)



「離散凸性」定義その1 (凸拡張可能):

$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ は「離散凸関数」 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f は凸関数に拡張可能

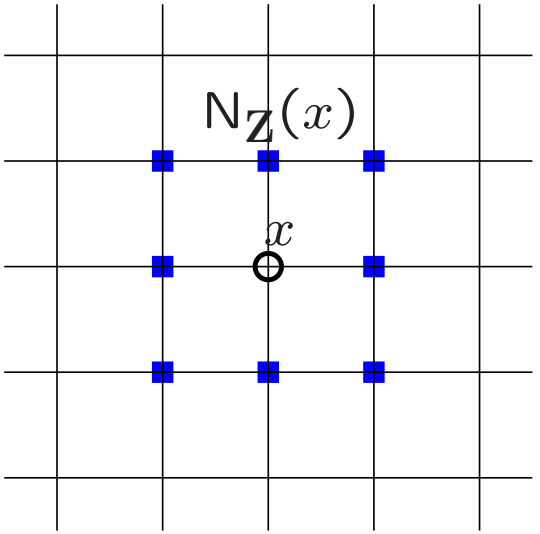
$S \subseteq \mathbf{Z}^n$ は「離散凸集合」 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ S の凸包は凸集合

○ ● ○ ●　離散凸性の満たすべき性質（その3）　● ○ ● ○

定理1：普通の凸関数ならば「局所最小 = 大域的最小」

離散凸関数でも成り立って欲しい ── 局所最小性をどう定義すべきか?

$$\mathrm{N}_{\mathbf{Z}}(x) \equiv \{y \in \mathbf{Z}^n \mid ||y - x||_\infty \leq 1\} \qquad (x \in \mathbf{Z}^n)$$



離散凸関数の満たすべき性質２ [局所最小 = 大域的最小]

$$f(x) \leq f(y) \quad (y \in \mathrm{N}_{\mathbf{Z}}(x)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) \leq f(y) \quad (y \in \mathbf{Z}^n)$$

○ ● ○ ●　離散凸性の満たすべき性質（その4）　● ○ ● ○

離散凸関数の満たすべき性質２ [局所最小 = 大域的最小]

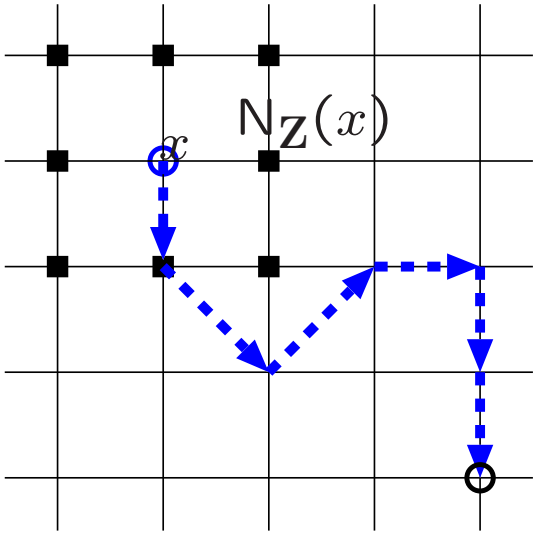
$$f(x) \leq f(y) \quad (y \in \mathrm{N}_{\mathbf{Z}}(x)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) \leq f(y) \quad (y \in \mathbf{Z}^n)$$

$\therefore$ 「離散凸関数」の最小化問題に降下法が適用可!

繰り返す
- ○ 現在の点 x の近傍 $\mathrm{N}_{\mathbf{Z}}(x)$ を調べる
- ○ 近傍内でより関数値の小さい点に移動

$\Longrightarrow$ 最小解に収束

$\longrightarrow$ 離散凸性をもつ問題は「解きやすい」

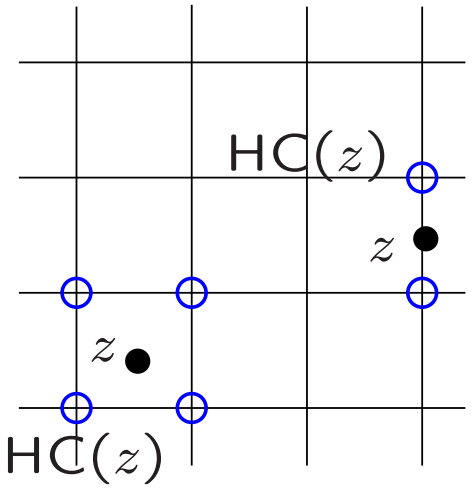


Millerの離散凸性 (その1)

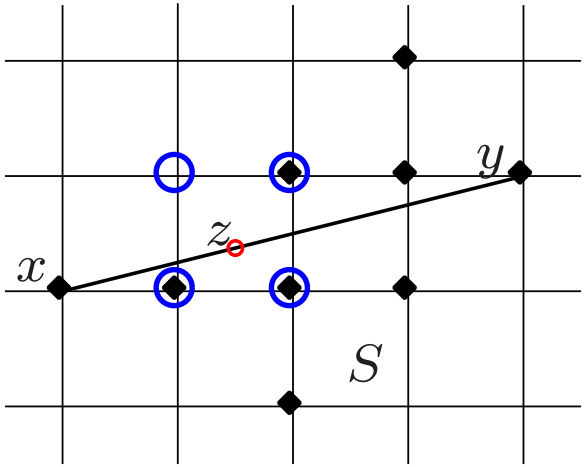
- 凸集合の定義の離散版 ($S \subseteq \mathbf{Z}^n$)

$x, y \in S$, $0 \leq \alpha \leq 1$ に対し, $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ は
整数ベクトルとは限らない
$\Longrightarrow$ z の近くに S の点があればOKとする

$$\mathrm{HC}(z) \equiv \{x' \in \mathbf{Z}^n \mid \lfloor z_i \rfloor \leq x'_i \leq \lceil z_i \rceil \ (\forall i)\}$$



「離散凸性」定義その2 (**Miller1971**):
$S \subseteq \mathbf{Z}^n$ は「離散凸集合」
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in S$, $0 \leq \forall \alpha \leq 1$: $\mathrm{HC}(z) \cap S \neq \emptyset$



○ ● ○ ● Millerの離散凸性 (その2) ● ○ ● ○

「離散凸性」定義その２ (**Miller1971**):

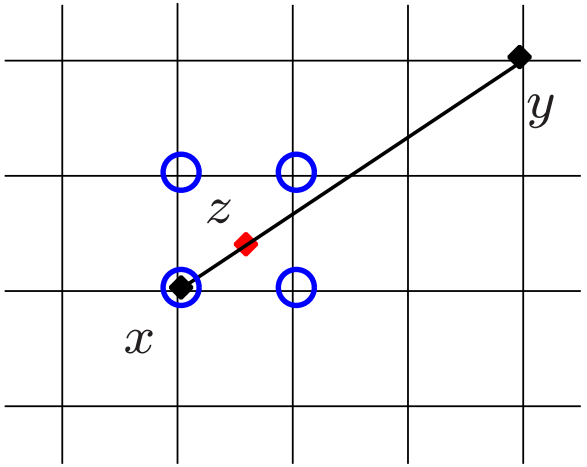
$S \subseteq \mathbf{Z}^n$ は「離散凸関数」

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in S,\ 0 \leq \forall \alpha \leq 1$:

$$\min\{f(z') \mid z' \in \mathrm{HC}(z)\} \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \quad (z = \alpha x + (1-\alpha) y)$$

性質 3: Millerの離散凸関数は「局所最小 = 大域的最小」を満たす

$\because$ Millerの離散凸関数の定義より簡単に示せる



$f(y) < f(x)$

$\Longrightarrow$ x に十分近い $z = \alpha x + (1-\alpha) y$ に対し,

$$\min\{f(z') \mid z' \in \mathrm{HC}(z)\} < f(x)$$

$\Longrightarrow$ $\exists z' \in \mathrm{HC}(z) \cap \mathrm{N}_{\mathbf{Z}}(x)$: $f(z') < f(x)$

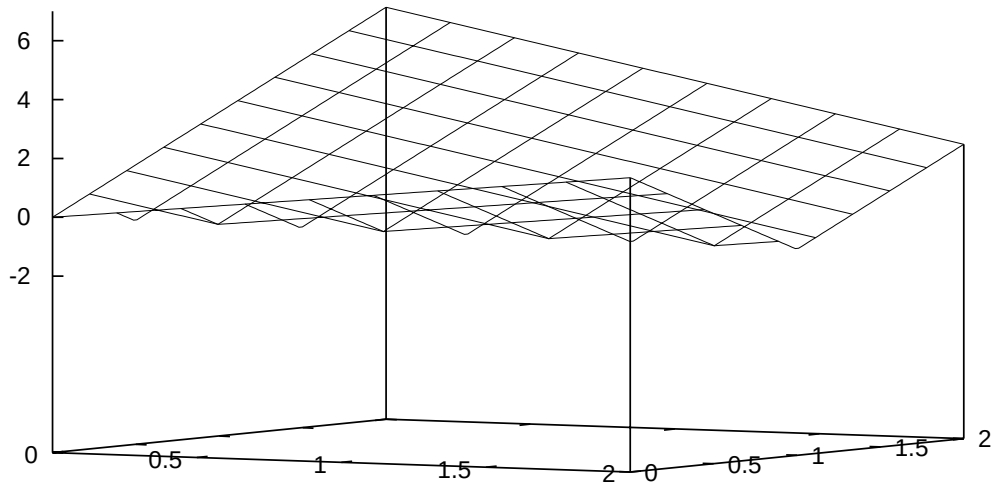
離散凸性として適切か？ (その1)

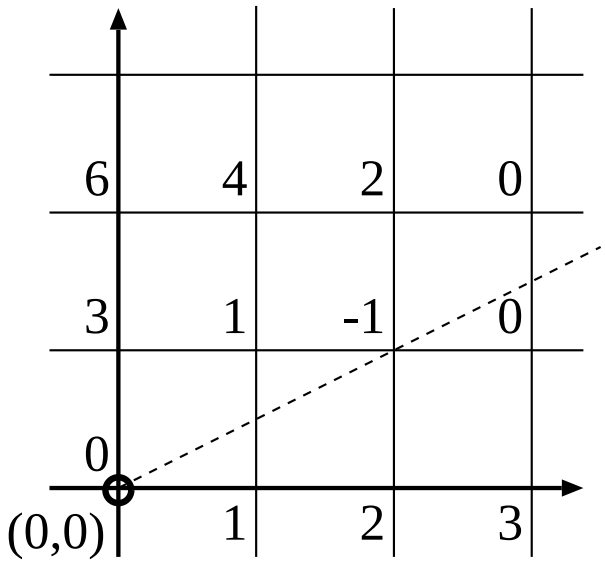
凸拡張可能関数
Millerの離散凸関数
} は離散凸関数としてふさわしいか？ ── NO!

例1 [凸拡張可能 $\not\Rightarrow$「局所最小＝大域的最小」]

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\max\{x_1-3x_2,-2x_1+3x_2\} & (x_1\geq 0,\ x_2\geq 0)\\ +\infty & (\text{o.w.})\end{cases}$$

f: 凸拡張可能, $x=(0,0)$: 局所最小, でも大域的最小ではない





○ ● ○ ● 離散凸性として適切か？ (その2) ● ○ ● ○

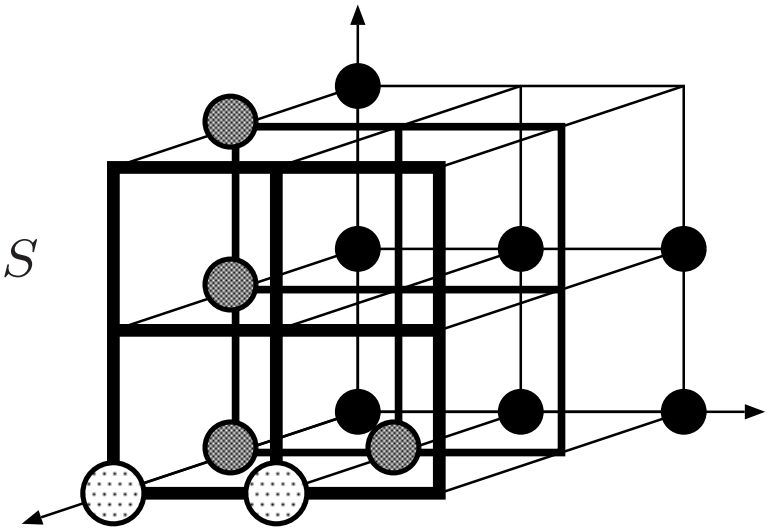
例2. [Millerの離散凸 $\not\Rightarrow$ 凸拡張可能]

$$S = \{x \in \mathbf{Z}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \leq 2,\ x_i \geq 0\ (i = 1, 2, 3)\}$$
$$\cup \{(1, 2, 0), (0, 1, 2), (2, 0, 1)\}$$

S はMillerの離散凸集合

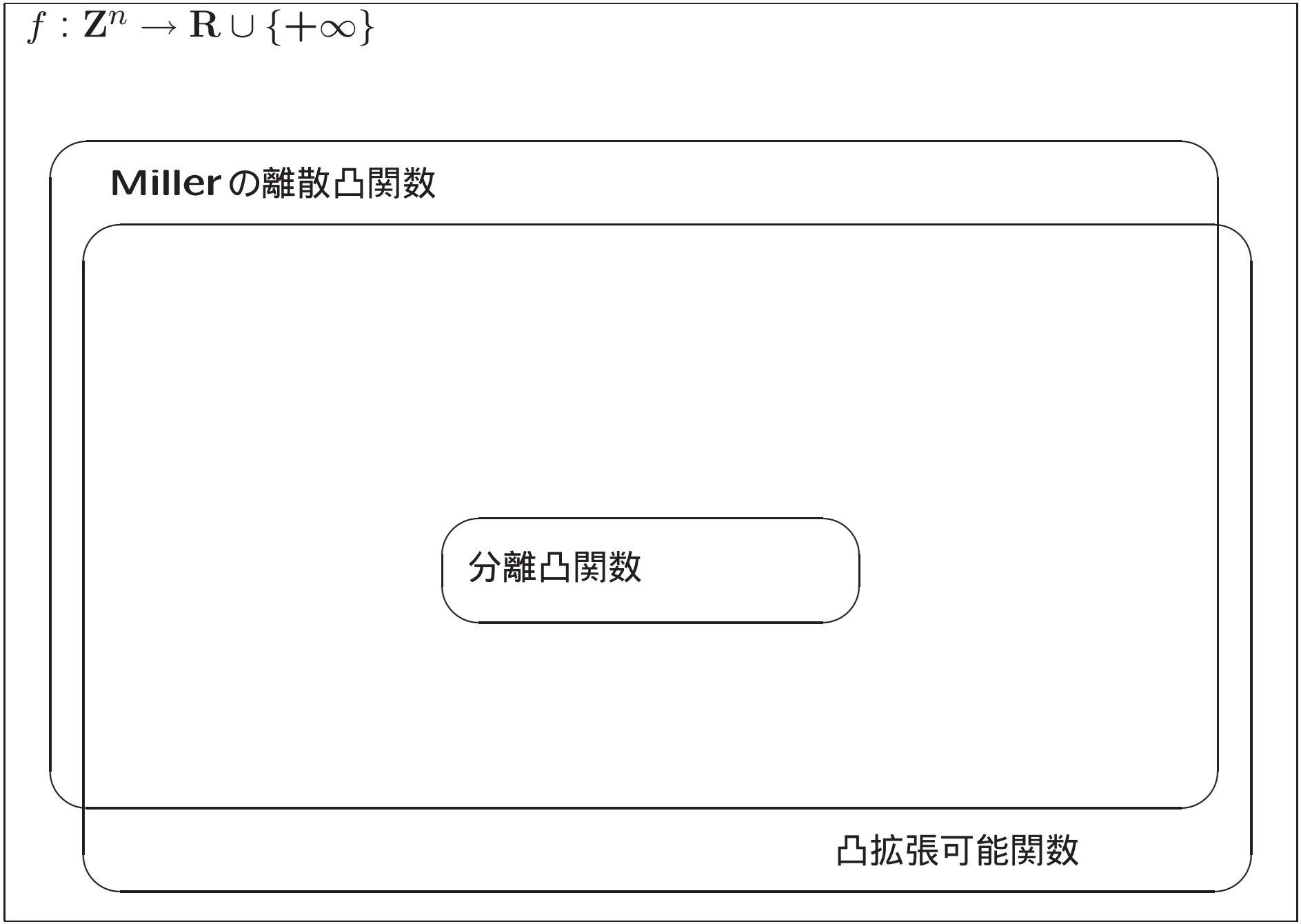
しかし, 凸包 $\overline{S}$ は $\overline{S} \cap \mathbf{Z}^n = S$ を満さない

$\frac{1}{3}\{(1, 2, 0) + (0, 1, 2) + (2, 0, 1)\} = (1, 1, 1) \notin S$



離散凸関数の地図 (その1)

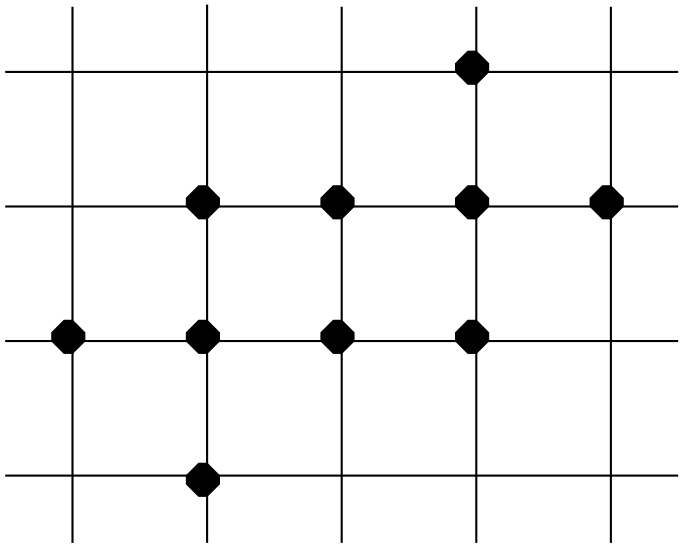
$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$



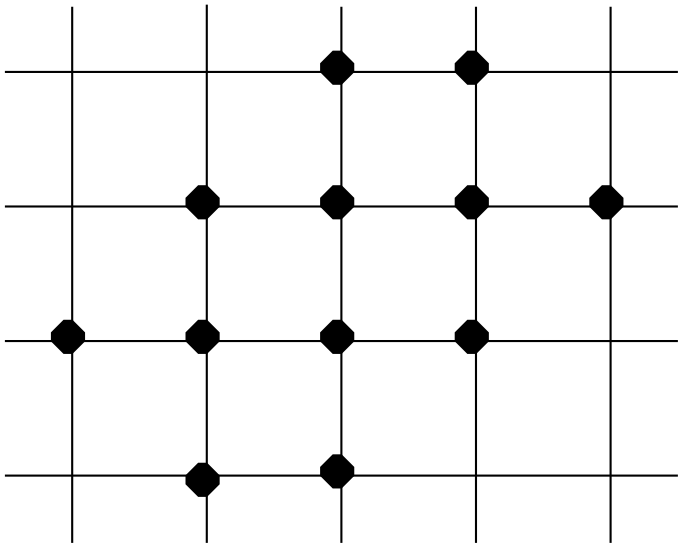
「Miller の離散凸関数」と「凸拡張可能関数」の
共通部分に含まれる関数のクラス
── 整凸関数 (Favati–Tardella1990)

整凸関数 (その1)

$S \subseteq \mathbf{Z}^n$



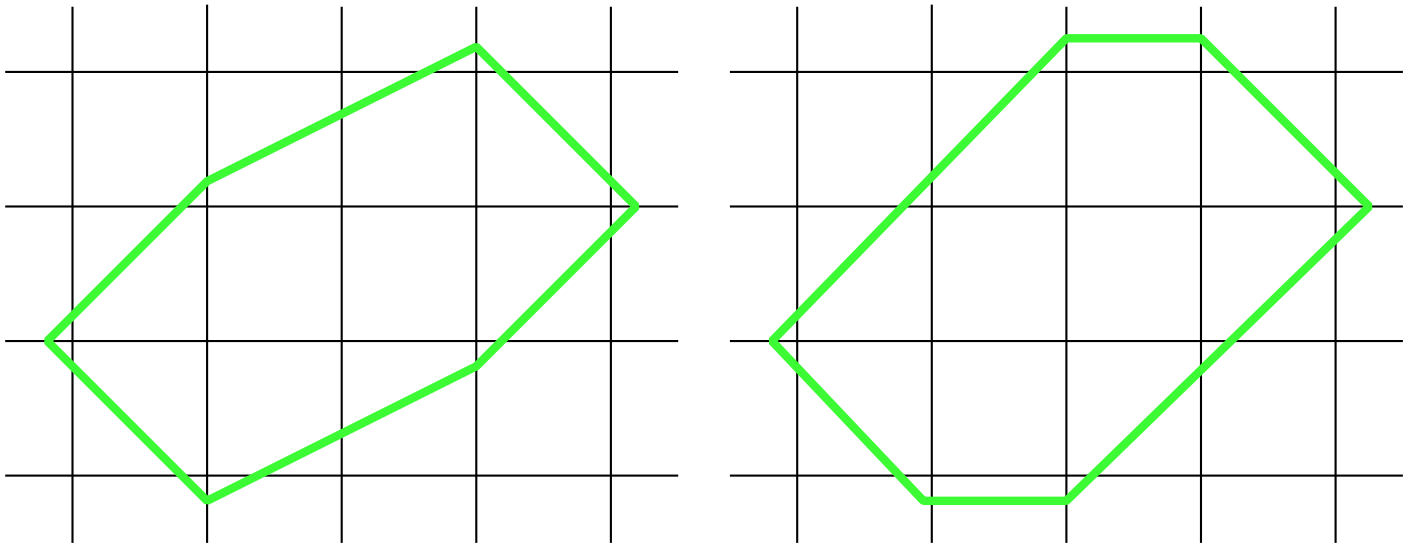
$\overline{S} \neq \widetilde{S}$



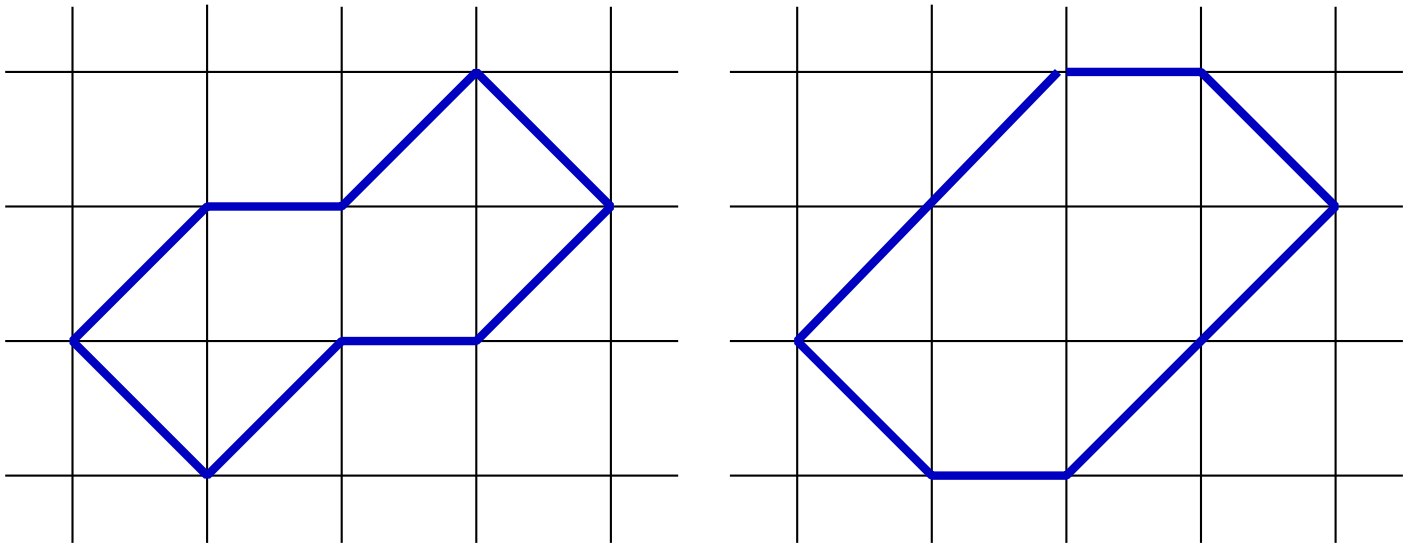
$\overline{S} = \widetilde{S}$

S は整凸集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\overline{S} = \widetilde{S}$ $\Longleftrightarrow$ $\widetilde{S}$ は凸集合

- $\overline{S} \equiv S$ の凸包

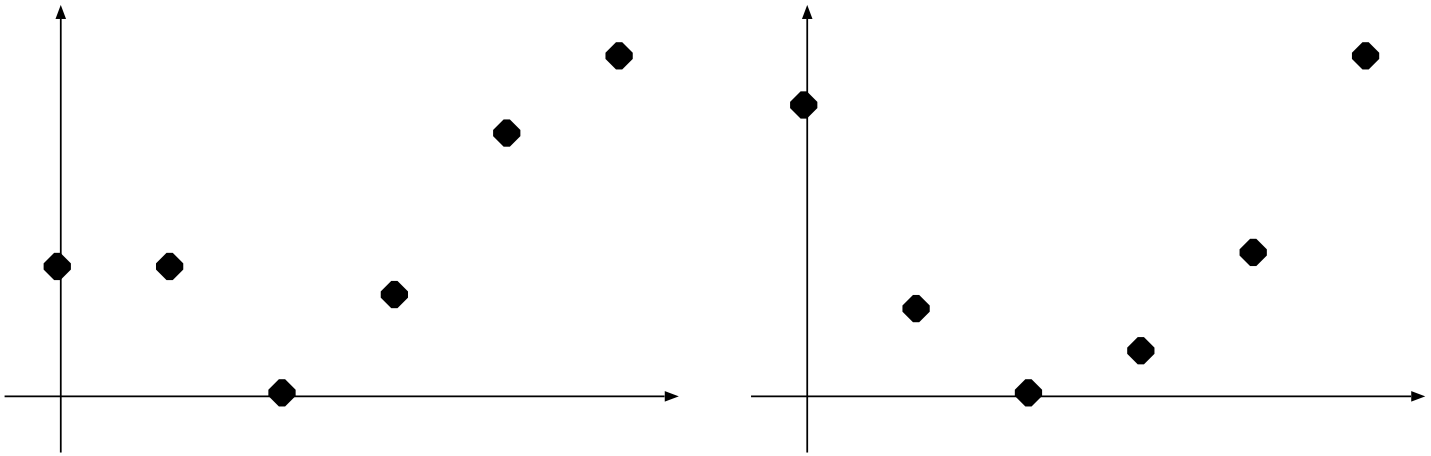


- $\widetilde{S} \equiv \bigcup_{x \in \mathbf{Z}^n} \overline{S \cap [x, x + \mathbf{1}]}$ — 各単位立方体上での凸包を集めたもの



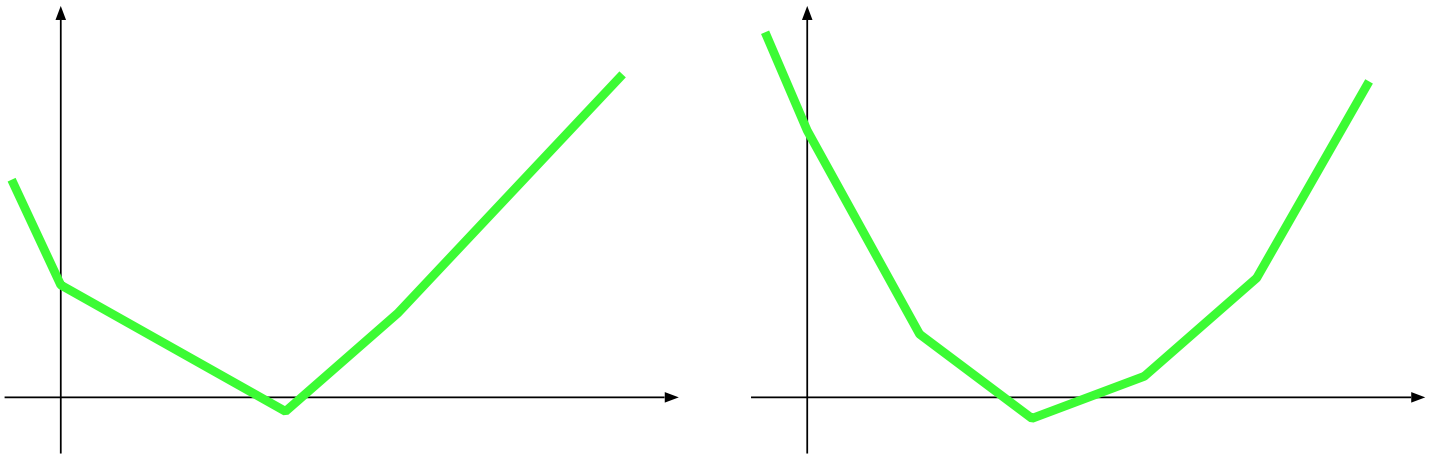
整凸性 (その2)

$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$



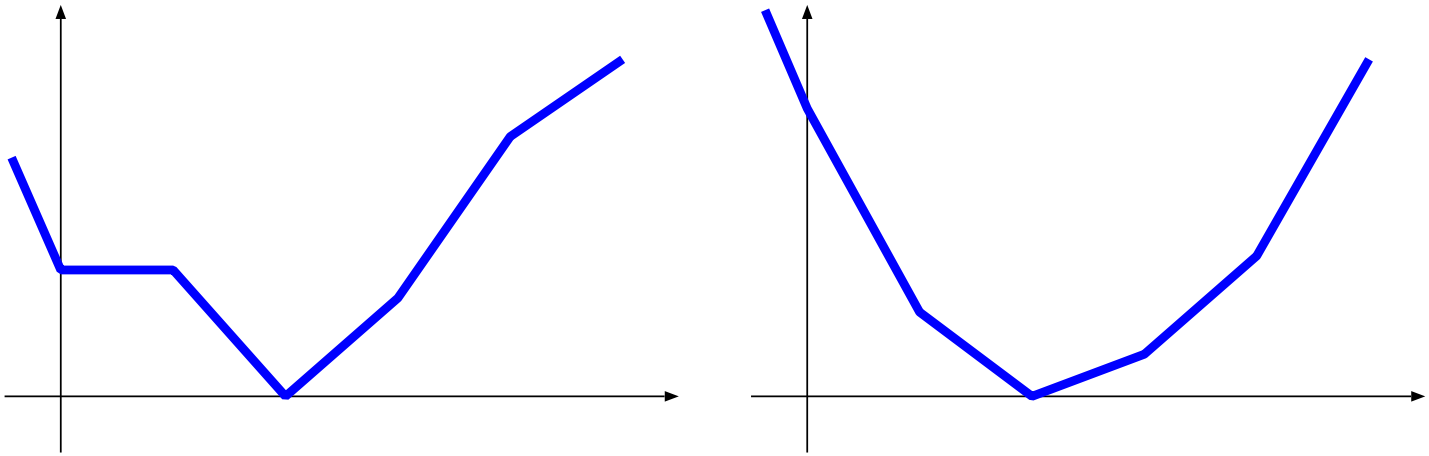
f は整凸関数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\overline{f} = \widetilde{f}$ $\Longleftrightarrow$ $\widetilde{f}$ は凸関数

- $\overline{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ $\cdots$ f の凸閉包



$\widetilde{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

$\cdots$ 各単位立方体 $[x, x + \mathbf{1}]$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$ 上での f の凸閉包を集めたもの



○ ● ○ ●　整凸性 (その3)　● ○ ● ○

整凸集合，整凸関数の性質── $S \subseteq \mathbf{Z}^n$, $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$

- 整凸 $\Longrightarrow$ 凸拡張可能
- 整凸 $\Longrightarrow$ Millerの離散凸 $\Longrightarrow$ 「局所最小 = 大域的最小」
  (∵ 整凸性の定義より自明)

整凸関数は離散凸関数としてふさわしいか? ── まだまた不十分!

- $\{0,1\}^n$ 上で定義された任意の関数は整凸関数
  (「良い」関数も「悪い」関数も含んでしまう)
- 整凸関数の和は整凸関数とは限らない
  (凸関数の和は必ず凸関数)
- さらに ...

○ ● ○ ● 離散凸性の満たすべき性質 (その5) ● ○ ● ○

局所最小性 $f(x) \leq f(y)$ $(y \in \mathsf{N}_{\mathbf{Z}}(x) \equiv \{y \in \mathbf{Z}^n \mid ||y - x||_\infty \leq 1\})$

— 近傍 $\mathsf{N}_{\mathbf{Z}}(x)$ に含まれる点の数 = 3^n

$\Longrightarrow$ 局所最小性のチェックは指数時間必要!

離散凸関数の満たすべき性質 $2'$ [局所最小 = 大域的最小 (多項式時間版)]

ある近傍 $\widetilde{\mathsf{N}}_{\mathbf{Z}}(x)$ が存在して,

- $f(x) \leq f(y)$ $(y \in \widetilde{\mathsf{N}}_{\mathbf{Z}}(x))$ $\Longleftrightarrow$ $f(x) \leq f(y)$ $(y \in \mathbf{Z}^n)$
- 局所最小性のチェックが多項式時間で可能

離散凸性の満たすべき性質 (その6)

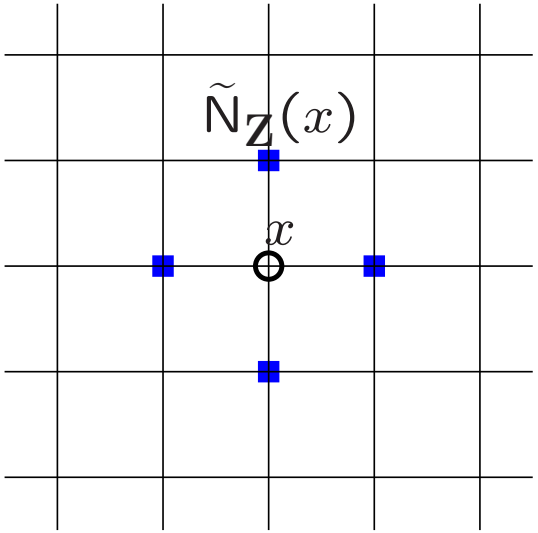
例: 分離凸関数 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$

$$f(x) \leq f(x \pm \chi_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) \leq f(y) \quad (y \in \mathbf{Z}^n)$$

$\Longrightarrow \tilde{\mathrm{N}}_{\mathbf{Z}}(x) \equiv \{x \pm \chi_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$

近傍内の点の数 = $2n + 1$

$$\chi_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



凸関数の性質 (その2)

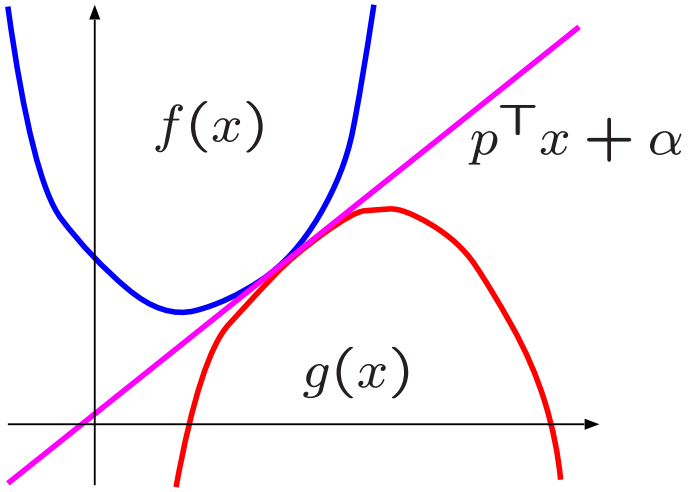
$g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ は凹関数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $-g$ は凸関数

定理 2 [分離定理]

f: 凸関数, g: 凹関数, $f(x) \geq g(x)$ $(x \in \mathbf{R}^n)$

$\Longrightarrow \exists p \in \mathbf{R}^n, \alpha \in \mathbf{R}$ s.t.

$f(x) \geq p^{\mathsf{T}} x + \alpha \geq g(x)$ $(x \in \mathbf{R}^n)$



- 線形計画及び非線形計画の双対定理を導く
- 凸関数の和 $f_1 + f_2$ の最小化が2つの凸関数の最小化に帰着可能

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \{f_1(x) + f_2(x)\} = \min_{x \in \mathbf{R}^n} \{f_1(x) + p^{\mathsf{T}} x\} + \min_{x \in \mathbf{R}^n} \{f_2(x) - p^{\mathsf{T}} x\}$$

離散凸性の満たすべき性質 (その7)

離散凸関数の満たすべき性質３ [離散分離定理]

f : 「離散凸関数」, g : 「離散凹関数」, $f(x) \geq g(x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$

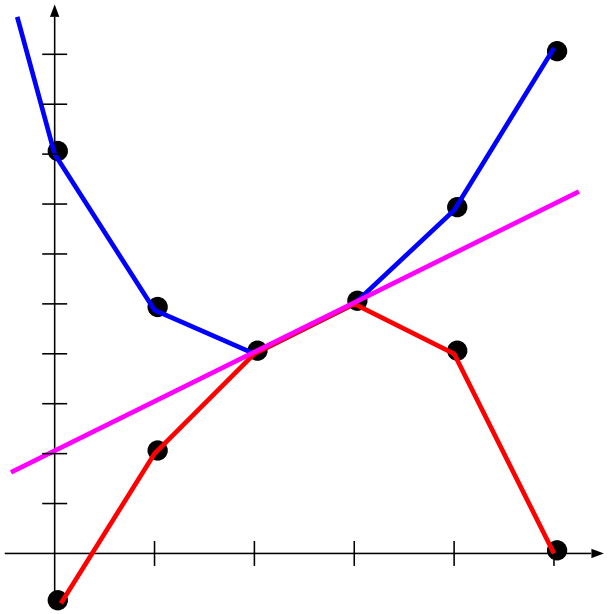
$\Longrightarrow \exists p \in \mathbf{R}^n,\ \alpha \in \mathbf{R}$ s.t. $f(x) \geq p^{\mathsf{T}}x + \alpha \geq g(x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$

離散凸関数の満たすべき性質３′ [離散分離定理 (整数版)]

f : 「離散凸関数」, g : 離散凹関数, $f(x) \geq g(x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$

$\Longrightarrow \exists p \in \mathbf{Z}^n,\ \alpha \in \mathbf{Z}$ s.t. $f(x) \geq p^{\mathsf{T}}x + \alpha \geq g(x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$

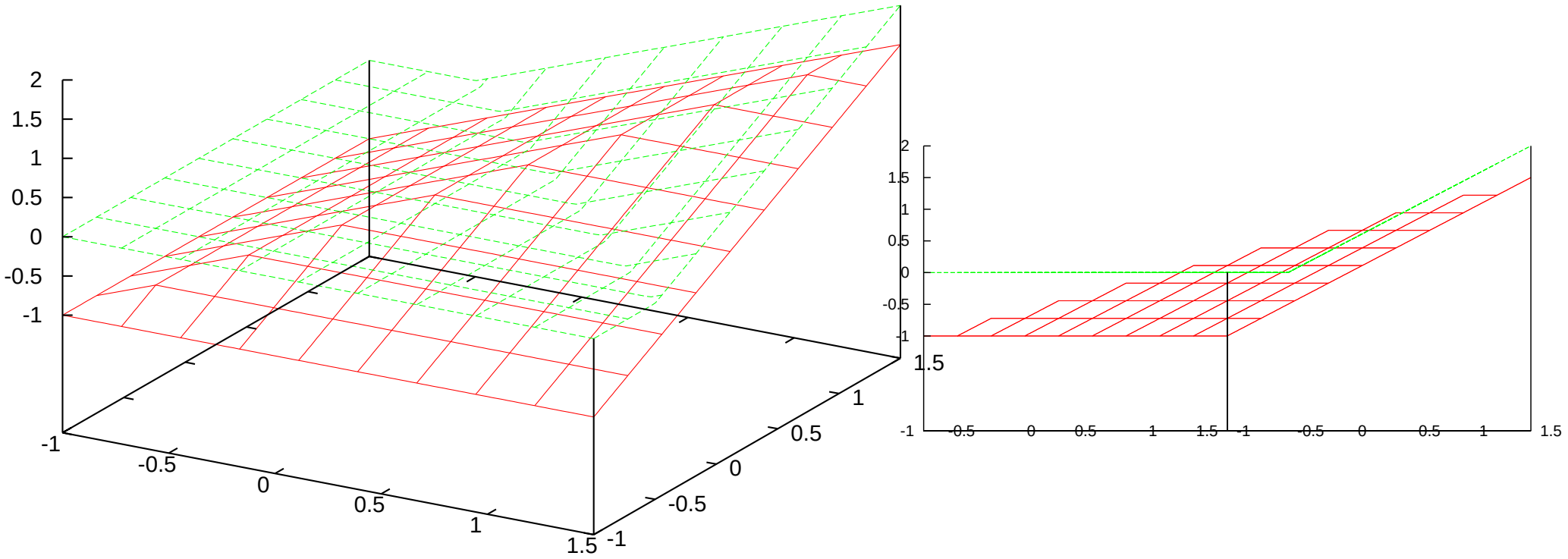
分離凸関数 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ は「性質３′」を満たす



例3. [整凸 $\not\Longleftrightarrow$ 離散分離定理]

$f(x_1, x_2) = \max\{0, x_1 + x_2 - 1\}$ $((x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^2)$, 整凸

$g(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ $((x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^2)$, 整凹



$f(x) \geq p^{\mathsf{T}}x + \alpha \geq g(x)$ を満たす線形関数 $p^{\mathsf{T}}x + \alpha$ は存在しない!

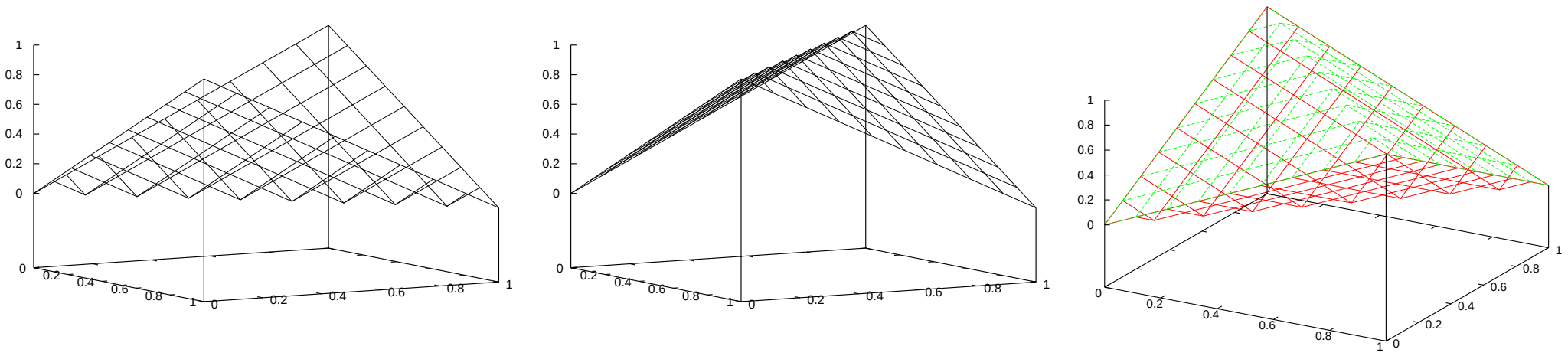
整凸性 (その5)

例4. [整凸 $\not\Longleftrightarrow$ 離散分離定理]

$f : \{0,1\}^2 \to \mathbf{Z},\ f(0,1) = f(1,0) = 1,\ f(0,0) = f(1,1) = 0$
$g : \{0,1\}^2 \to \mathbf{Z},\ g(x) = f(x)\ (x \in \{0,1\}^2)$
$\Longrightarrow$ f: 整凸, g: 整凹, $f(x) \geq g(x)\ (\forall x \in \mathbf{Z}^2)$

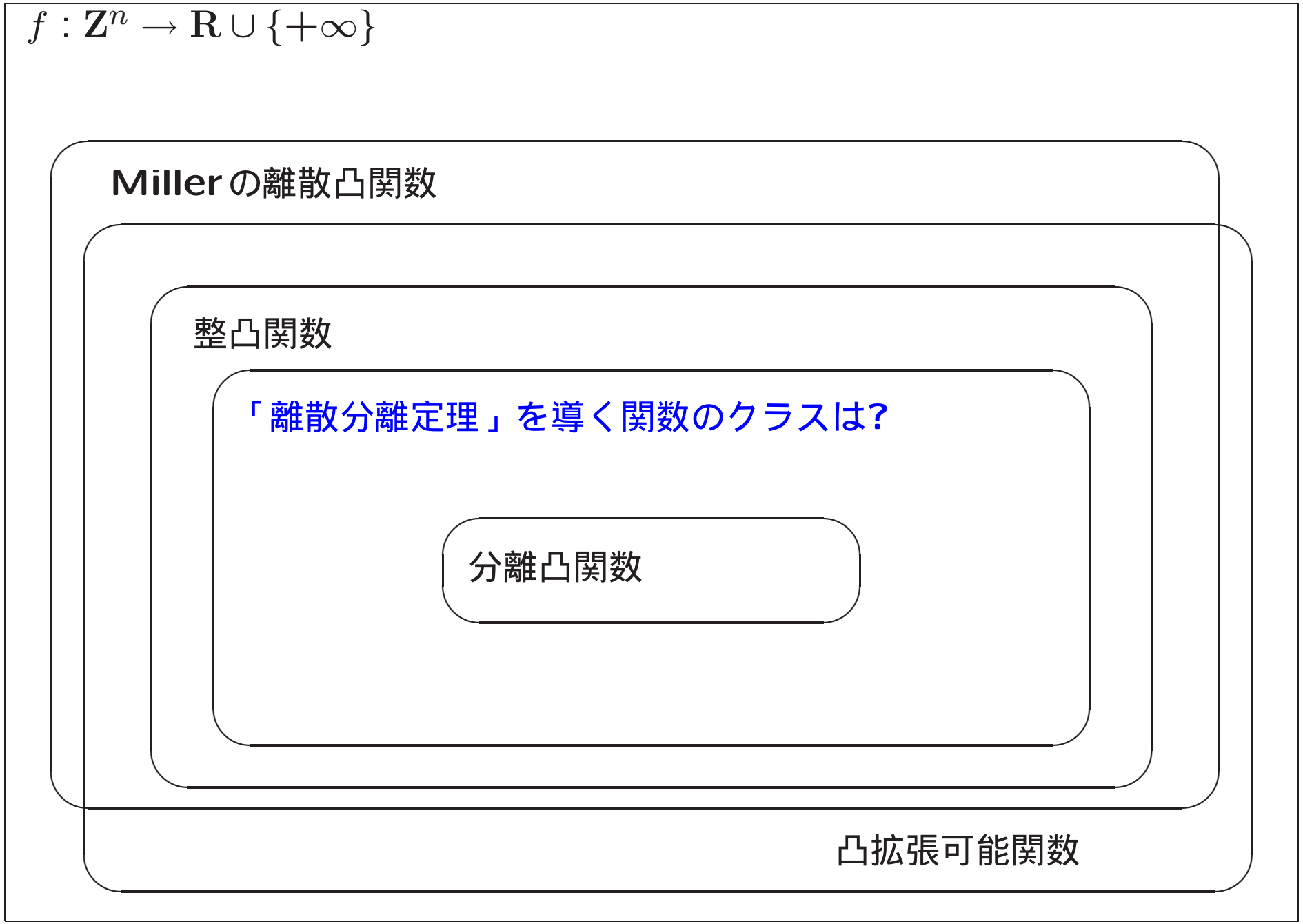
しかし, $\overline{f}(x) \leq \overline{g}(x) \quad (\forall x \in [0,1]^2)$
($\overline{f}$: f の凸関数への拡張, $\overline{g}$: g の凹関数への拡張)

$f(x) \geq p^{\mathsf{T}}x + \alpha \geq g(x)$ を満たす線形関数 $p^{\mathsf{T}}x + \alpha$ は存在しない!



離散凸関数の地図（その2）

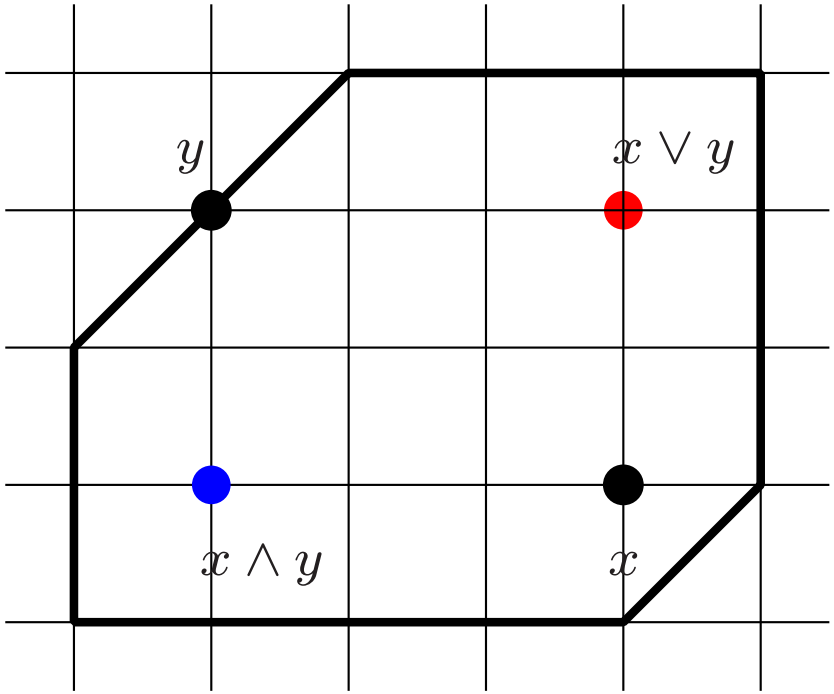
$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$



M♮凸関数 (室田–塩浦 1999)
L♮凸関数 (藤重–室田 2000)

L♮凸性 (その1)

$S \subseteq \mathbf{Z}^n$ はL♮凸集合 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} S \text{ は 整凸集合} \\ x \wedge y \in S,\ x \vee y \in S\ (\forall x, y \in S) \end{cases}$



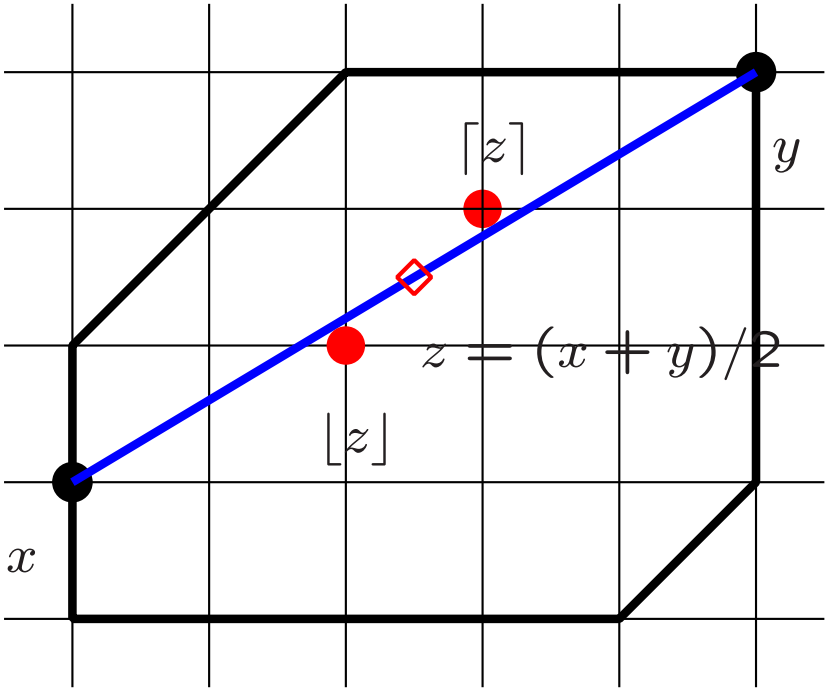
$$(x \wedge y)_i = \min\{x_i, y_i\}\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$
$$(x \vee y)_i = \max\{x_i, y_i\}\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

L♮凸性 (その2)

- $S \subseteq \mathbf{R}^n$ は(普通の)凸集合 $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{x+y}{2} \in S$ $(\forall x, y \in S)$ **[中点凸性]**

- $S \subseteq \mathbf{Z}^n$ はL♮凸集合

  $\Longleftrightarrow$ $\left\lceil \dfrac{x+y}{2} \right\rceil \in S$, $\left\lfloor \dfrac{x+y}{2} \right\rfloor \in S$ $(\forall x, y \in S)$ **[離散中点凸性]**



○ ● ○ ● L♮凸性 (その3) ● ○ ● ○

$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ は**L♮凸関数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f は 整凸関数かつ劣モジュラ不等式を満たす

$$f(x) + f(y) \geq f(x \wedge y) + f(x \vee y) \ (\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f)$$

- $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ はL♮凸関数

  $\Longleftrightarrow$ $f(x) + f(y) \geq f\left(\left\lceil \frac{x+y}{2} \right\rceil\right) + f\left(\left\lfloor \frac{x+y}{2} \right\rfloor\right)$ $(\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f)$ **[離散中点凸性]**

- 分離凸関数はL♮凸関数

- L♮凸関数は整凸関数 $\Longrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{満たすべき性質１ [凸拡張可能]} \\ \text{満たすべき性質２ [局所最小 = 大域的最小]} \end{array} \right.$

L$^\natural$凸性 (その4)

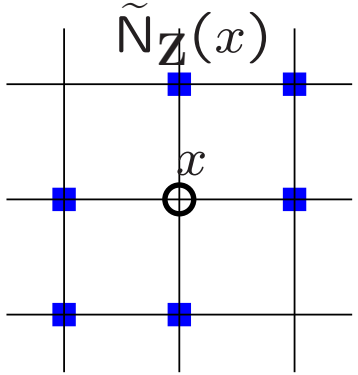
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{満たすべき性質2}' \text{ [局所最小 = 大域的最小 (多項式時間版)]} \\ \text{満たすべき性質3}' \text{ [離散分離定理 (整数版)]} \end{array} \right\}$ も成り立つ

$f(x) \leq f(x \pm d)$ $(d \in \{0,1\}^n)$

$\Longleftrightarrow$ $f(x) \leq f(y)$ $(y \in \mathbf{Z}^n)$

局所最小性のチェックは劣モジュラ集合関数最小化に帰着できる

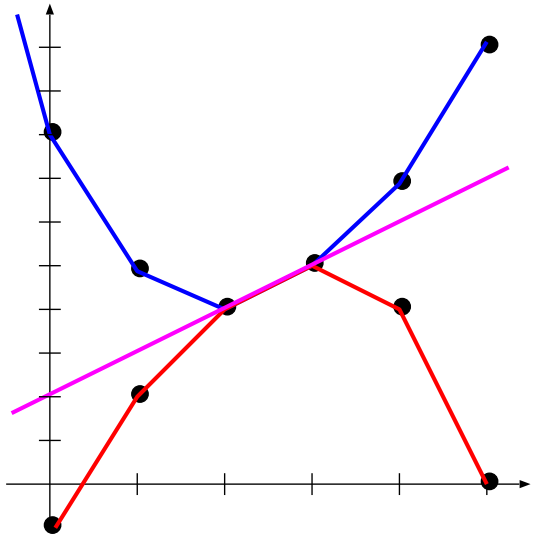
$\longrightarrow$ 多項式時間でチェック可能!



f : L$^\natural$凸関数, g : L$^\natural$凹関数, $f(x) \geq g(x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$

$\Longrightarrow \exists p \in \mathbf{Z}^n,\ \alpha \in \mathbf{Z}$ s.t.

$f(x) \geq p^{\mathsf{T}} x + \alpha \geq g(x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$



$L^\natural$凸性 (その5)

関数の畳み込み(convolution) — $f(x) = \inf\{f_1(y_1) + f_2(y_2) \mid y_1 + y_2 = x\}$

- (普通の)凸関数の畳み込みは凸関数
- $M^\natural$凸関数の畳み込みは$M^\natural$凸関数
- $L^\natural$凸関数の畳み込みは$L^\natural$凸関数とは限らない! $\Longrightarrow$ $L^\natural_2$ 凸関数
- $L^\natural_2$ 凸関数に対し,
  $\left\{\begin{array}{l} \text{満たすべき性質1 [凸拡張可能]} \\ \text{満たすべき性質2}' \text{ [局所最小 = 大域的最小(多項式時間版)]} \end{array}\right\}$ が成り立つ
- $L^\natural_2$ 凸関数に対し, 満たすべき性質3 [離散分離定理] は不成立

M$^\natural$凸性 (その1)

$S \subseteq \mathbf{Z}^n$ は**M$^\natural$凸集合** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次の公理を満たす

$\forall x, y \in S$, $\forall i \in \mathrm{supp}^+(x-y)$:

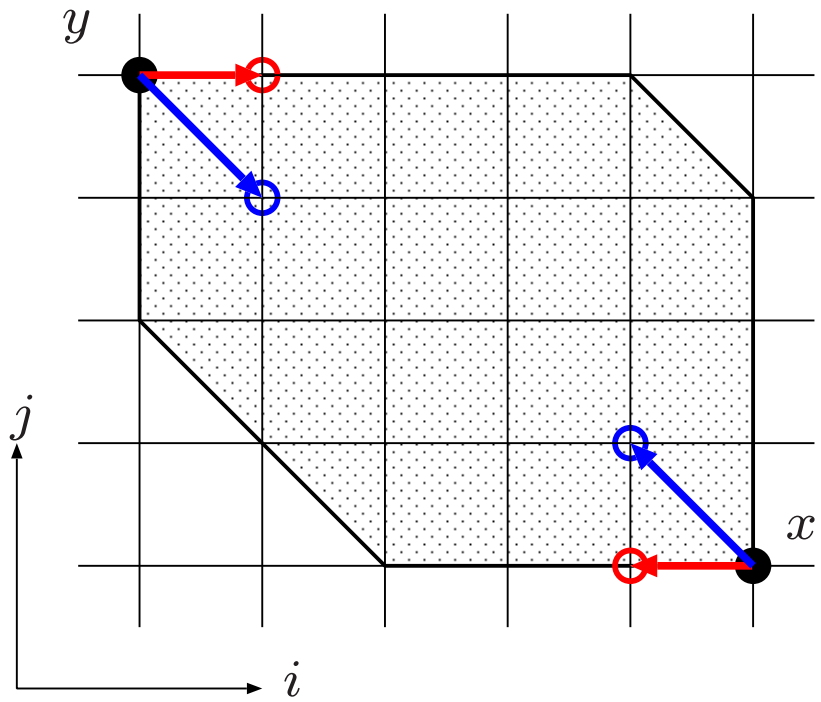
(i) $x - \chi_i + \chi_j \in S$, $y + \chi_i - \chi_j \in S$ $(\exists j \in \mathrm{supp}^-(x-y))$, もしくは

(ii) $x - \chi_i \in S$, $y + \chi_i \in S$

$\mathrm{supp}^+(x-y) = \{i \mid x_i > y_i\}$

$\mathrm{supp}^-(x-y) = \{i \mid x_i < y_i\}$

$$\chi_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



- M$^\natural$凸集合 $\simeq$ ポリマトロイド, 劣モジュラ多面体
- $S \subseteq \{0,1\}^n$ なるM$^\natural$凸集合$\simeq$ マトロイド

○ ● ○ ● M$^\natural$凸性 (その2) ● ○ ● ○

$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ は**M$^\natural$凸関数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次の公理を満たす

$\forall x, y \in S$, $\forall i \in \text{supp}^+(x-y)$:

(i) $f(x) + f(y) \geq f(x - \chi_i + \chi_j) + f(y + \chi_i - \chi_j)$

$(\exists j \in \text{supp}^-(x-y))$, もしくは

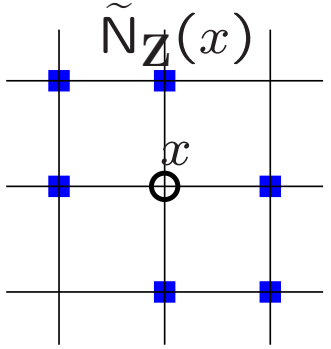
(ii) $f(x) + f(y) \geq f(x - \chi_i) + f(y + \chi_i)$

- 分離凸関数はM$^\natural$凸関数
- M$^\natural$凸関数は整凸関数 $\Longrightarrow$
  - 満たすべき性質１ [凸拡張可能]
  - 満たすべき性質２ [局所最小 = 大域的最小]

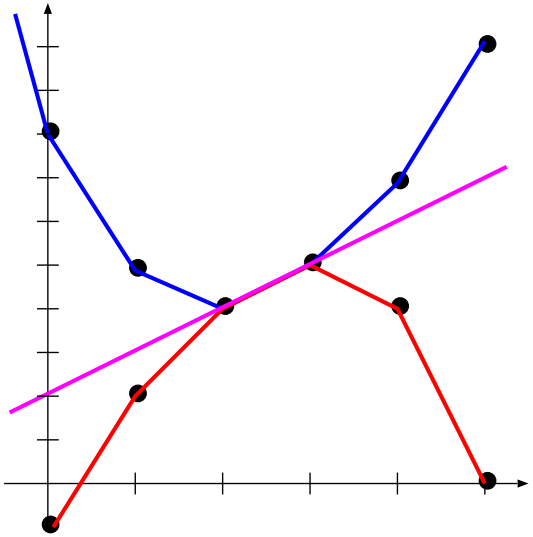
M$^\natural$凸性 (その3)

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{満たすべき性質2}' \text{ [局所最小 = 大域的最小(多項式時間版)]} \\ \text{満たすべき性質3}' \text{ [離散分離定理(整数版)]} \end{array} \right\}$ も成り立つ

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x) \le f(x - \chi_i + \chi_j) & (i, j \in \{1, \cdots, n\}) \\ f(x) \le f(x \pm \chi_i) & (i \in \{1, \cdots, n\}) \end{array} \right\}$$
$$\Longleftrightarrow \quad f(x) \le f(y) \ (y \in \mathbf{Z}^n)$$



f : M$^\natural$凸関数, g : M$^\natural$凹関数, $f(x) \ge g(x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$
$\Longrightarrow \exists p \in \mathbf{Z}^n, \ \alpha \in \mathbf{Z}$ s.t.
$f(x) \ge p^{\mathsf{T}} x + \alpha \ge g(x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$



$M^\natural$ 凸性 (その4)

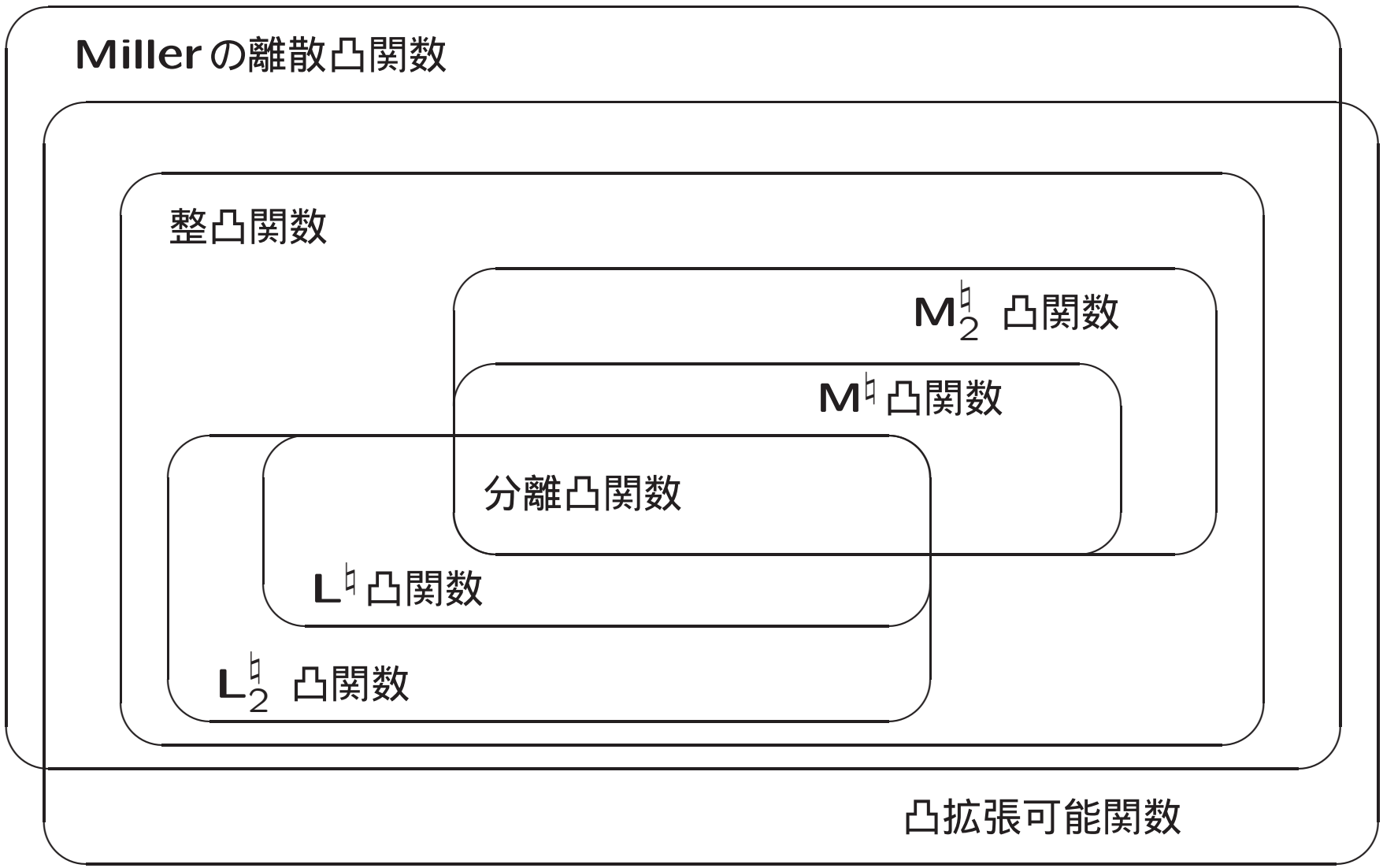
- $M^\natural$ 凸関数の和は $M^\natural$ 凸関数とは限らない! $\Longrightarrow$ **$M^\natural_2$ 凸関数**
- $M^\natural_2$ 凸関数に対し,

  満たすべき性質１ [凸拡張可能]
  満たすべき性質2′ [局所最小 = 大域的最小 (多項式時間版)]

  } が成り立つ
- $M^\natural_2$ 凸関数に対し, 満たすべき性質３ [離散分離定理] は不成立
- $M^\natural_2$ 凸関数は和に関して閉じていない

離散凸関数の地図 (その3)

$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$



今後の展望

- 離散凸関数としてふさわしい概念の同定，公理化
  - M$^\natural$凸関数およびL$^\natural$凸関数を共通に含むクラスは?
  - (整数) 劣勾配の考慮
- 離散凸関数の構造・性質を調べる
- 離散凸性をもつ最適化問題に対する効率的なアルゴリズム
- 離散最適化と連続最適化の間の橋渡し
- 離散凸関数の研究の離散最適化へのフィードバック
  - 適用例は?

○ ● ○ ● 参考書 ● ○ ● ○

- 室田一雄 著：「離散凸解析」，共立出版，2001 年．
  ── 離散凸関数，とくにM凸 / L 凸関数について詳しい

- 福島雅夫 著：「非線形最適化の基礎」，朝倉書店，2001 年．
  ── 非線形最適化の理論，とくに凸解析について詳しく書かれた数少ない和書