M凸関数の最小化アルゴリズムと準M凸関数

室田 一雄 (京都大学 数理解析研究所)

☆ 塩浦 昭義 ☆ (上智大学 機械工学科)

○ ● ○ ● 発表の概要 ● ○ ● ○

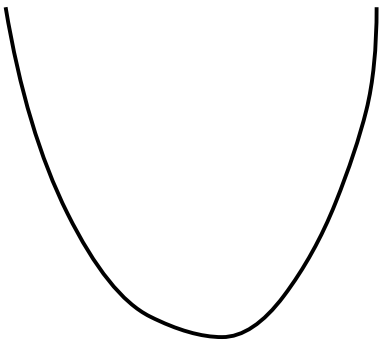
- 凸関数と準凸関数 ── 連続最適化の話
- M凸関数 ── 離散最適化における凸関数
- M凸関数の最小化アルゴリズム
- 準M凸関数の定義
- 準M凸関数に対する結果

○ ● ○ ●　凸関数 ── 連続最適化の話 ● ○ ● ○

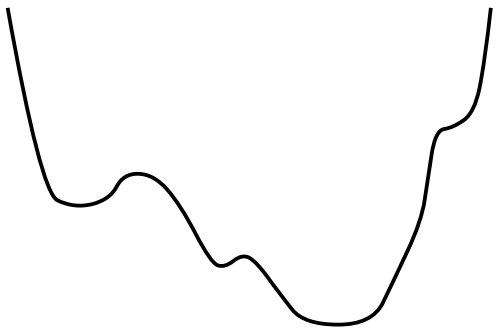
連続最適化 (非線形計画): $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

Minimize $f(x)$ **subject to** $x \in \mathbf{R}^n$

問題の解きやすさ $\simeq$ 「凸性」



凸関数



非凸関数

f が凸関数 $\Longrightarrow$ 「局所最適性 = 大域的最適性」

$\Longrightarrow$ 降下法で最小化できる！

降下法 = 貪欲算法

○ ● ○ ● 準凸関数 (quasiconvex fn) ● ○ ● ○

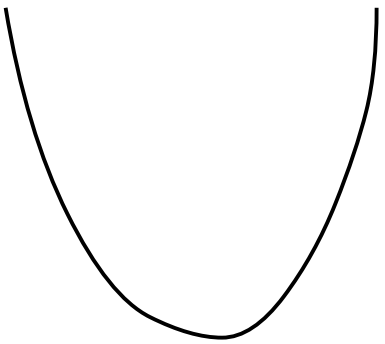
「局所最適性 = 大域的最適性」── 「準凸関数」ならばＯＫ！

$\forall x, y \in \mathbf{R}^n,\ \alpha \in [0,1]$:

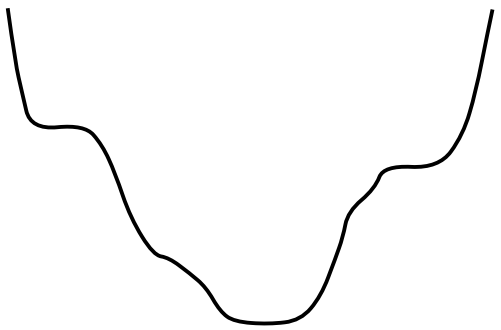
f: 凸 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$

f: 準凸 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$

凸関数



準凸関数



f: 準凸 $\Longleftrightarrow$ 任意のレベルセットが凸集合

$$\mathrm{L}(f, \alpha) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) \leq \alpha\}$$

準凸関数に対しても降下法が動く

○ ● ○ ●　離散最適化と凸性 ── M凸関数 ● ○ ● ○

離散最適化 (組合せ最適化): $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$

Minimize $f(x)$ **subject to** $x \in \mathbf{Z}^n$

貪欲算法が動くために必要な f の構造は？

$\Longrightarrow$ 離散凸性の研究 **(Miller71, Favati–Tardella90,...)**

M凸関数 (室田96) ── 離散凸性に相応しい性質を満たす

- 局所最適性 = 大域的最適性　　$\Longrightarrow$ 貪欲算法

　　$\Uparrow$

「準M凸関数」ならばＯＫ !?

☆ 本発表の目的

- 準M凸関数の定義，妥当性
- 諸性質，最小化アルゴリズム

○ ● ○ ● M凸関数の定義 ● ○ ● ○

V : 有限集合

$f : \mathbf{Z}^V \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ はM凸関数 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ **(M-EXC)**

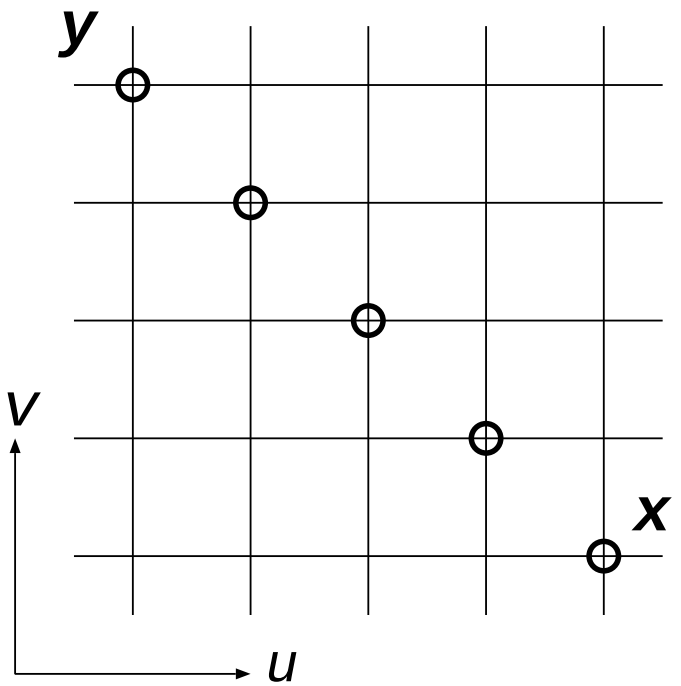
(M-EXC)

$\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f$, $\forall u \in \mathrm{supp}^+(x-y)$, $\exists v \in \mathrm{supp}^-(x-y)$:

$$f(x) + f(y) \geq f(x-\chi_u+\chi_v) + f(y+\chi_u-\chi_v)$$

$\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbf{Z}^V \mid f(x) < +\infty\}$,
$\mathrm{supp}^+(x-y) = \{w \in V \mid x(w) > y(w)\}$,
$\mathrm{supp}^-(x-y) = \{w \in V \mid x(w) < y(w)\}$,

$$\chi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



○ ● ○ ● M凸関数の最小化アルゴリズム(その1) ● ○ ● ○

(1) 降下法 ── 指数時間
(2) 最急降下法 ── 擬多項式時間
(3) 領域縮小法 ── (弱) 多項式時間

---

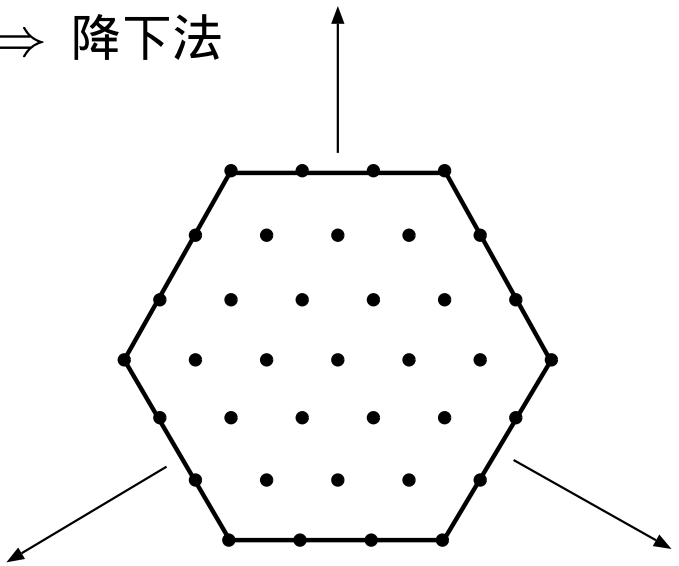
(1) 降下法

[定理 1] (室田96)

$f(x) \leq f(x - \chi_u + \chi_v)\ (\forall u, v \in V)$

$\Longleftrightarrow\ f(x) \leq f(y)\ (\forall y \in \mathbf{Z}^V)$

「局所最適性 = 大域的最適性」 $\Longrightarrow$ 降下法



手順 **1:** $f(x) = \min_{u,v \in V} f(x - \chi_u + \chi_v) \Longrightarrow x$ は最適.

手順 **2:** $f(x - \chi_u + \chi_v) < f(x)$ なる $u, v \in V$ を求める.

手順 **3:** $x := x - \chi_u + \chi_v$. 手順 1 へ.

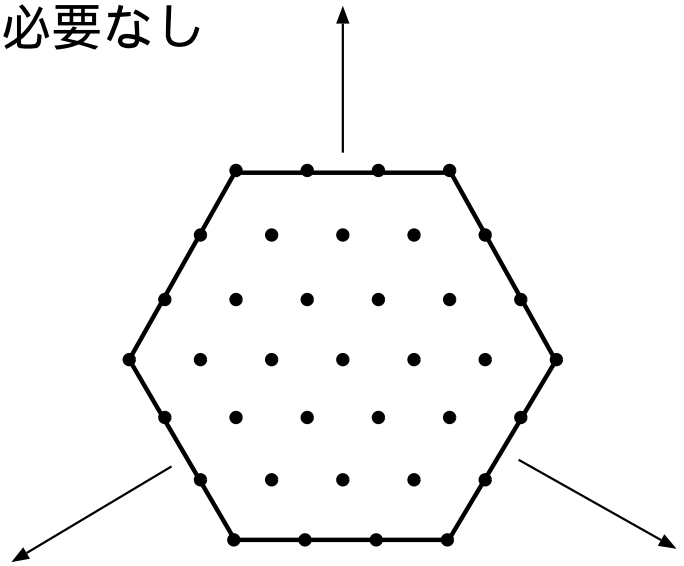
反復回数 ── 最悪 $|\mathrm{dom}\, f|$ 回

(2) 最急降下法

手順 2′: $f(x-\chi_u+\chi_v)=\min_{s,t\in V} f(x-\chi_s+\chi_t)$ なる
$u,v\in V$ を求める

［定理２］(塩浦99)
$x\in \mathrm{dom}\, f$ は非最適, $f(x-\chi_u+\chi_v)=\min_{s,t\in V} f(x-\chi_s+\chi_t)$
$\Longrightarrow \exists x^*\in \arg\min f$: $x^*(u)\le x(u)-1$, $x^*(v)\ge x(v)+1$.

$\Longrightarrow$ 最急降下法では「後戻り」の必要なし
$\Longrightarrow$ 反復回数 $=O(nL)$



(3) 領域縮小法

定理２ ―最適解と任意の解は分離可能

最適解を含む領域を繰り返し縮小
$\Longrightarrow$ 反復回数 $=O(n^2\log L)$, 時間 $=O(n^4(\log L)^2)$

○ ● ○ ●　準M凸関数の定義　● ○ ● ○

方向差分 $\Delta f(x; v, u) = f(x - \chi_u + \chi_v) - f(x)$

$\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f$ $(x \neq y)$,
$\forall u \in \mathrm{supp}^+(x-y)$, $\exists v \in \mathrm{supp}^-(x-y)$:

(M-EXC) $\Delta f(x; v, u) + \Delta f(y; u, v) \leq 0$

(SSQM) if $f(x) \neq f(y)$ **then**
(i) $\Delta f(x; v, u) \geq 0 \Longrightarrow \Delta f(y; u, v) \leq 0$, かつ
(ii) $\Delta f(y; u, v) \geq 0 \Longrightarrow \Delta f(x; v, u) \leq 0$

(QM) $\Delta f(x; v, u) \leq 0$ または $\Delta f(y; u, v) \leq 0$

(QM) ── 準M凸 **(quasi M-conv)**
(SSQM) ── 半狭義準M凸 **(semistrictly quasi M-conv)**

$$\begin{array}{ccccc} \textbf{(SSQM)} & \Leftarrow & \textbf{(M-EXC)} & \Rightarrow & \textbf{(QM)} \\ \Downarrow & & \Updownarrow & & \Downarrow \\ \textbf{(SSQM}_{\mathrm{W}}\textbf{)} & \Leftarrow & \textbf{(M-EXC}_{\mathrm{W}}\textbf{)} & \Rightarrow & \textbf{(QM}_{\mathrm{W}}\textbf{)} \end{array}$$

(*$_{\mathrm{W}}$)** ── $\forall u \exists v$ を $\exists u \exists v$ に置き換え

○ ● ○ ● 準M凸関数に対する結果 ● ○ ● ○

[定理３] (局所最適性に関する性質)

- **($\mathbf{QM_W}$) を満たすとき,**

$$f(x) < f(x - \chi_u + \chi_v)\ (\forall u, v \in V) \iff f(x) < f(y)\ (\forall y \in \mathbf{Z}^V)$$

- **($\mathbf{SSQM_W}$) を満たすとき,**

$$f(x) \leq f(x - \chi_u + \chi_v)\ (\forall u, v \in V) \iff f(x) \leq f(y)\ (\forall y \in \mathbf{Z}^V)$$

$\therefore$ **($\mathbf{SSQM_W}$)** $\Longrightarrow$ 降下法

[定理４] f **は (SSQM) を満たす**

$x \in \mathrm{dom}\, f$ は非最適, $f(x-\chi_u+\chi_v) = \min_{s,t\in V} f(x-\chi_s+\chi_t)$

$\Longrightarrow \exists x^* \in \arg\min f$: $x^*(u) \leq x(u)-1$, $x^*(v) \geq x(v)+1$.

$\therefore$ **(SSQM)** $\Longrightarrow$ 最急降下法

(SSQM) & $\mathrm{dom}\, f$: 基多面体 $\Longrightarrow$ 領域縮小法

○ ● ○ ●　準M凸関数に対する結果　● ○ ● ○

[定理5]　　f は **($\mathbf{QM}_{\mathrm{W}}$)** を満たす

$\Longleftrightarrow$ 任意のレベルセットは **($\mathbf{Q\text{-}EXC}_{\mathrm{W}}$)** を満たす:

$\forall x, y \in B$ $(x \neq y)$, $\exists u \in \mathrm{supp}^{+}(x-y)$, $\exists v \in \mathrm{supp}^{-}(x-y)$:

$x - \chi_u + \chi_v \in B$　　**or**　　$y + \chi_u - \chi_v \in B$

[定理6]　　f は **(QM)** を満たす

$\Longrightarrow$ 任意のレベルセットは **(Q-EXC)** を満たす:

$\forall x, y \in B$, $\forall u \in \mathrm{supp}^{+}(x-y)$, $\exists v \in \mathrm{supp}^{-}(x-y)$:

$x - \chi_u + \chi_v \in B$　　**or**　　$y + \chi_u - \chi_v \in B$