数理計画法 第1回

塩浦昭義

情報科学研究科 准教授

shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching

この講義について

- 目的：数理計画問題の様々なモデル，その数学的構造，
  および最適解を求めるアルゴリズムについて学ぶ
- 参考書
  - 田村明久，村松正和：「最適化法」，共立出版，2002年
  - 福島雅夫：「新版 数理計画入門」，朝倉書店，2011年
- 授業の情報はWebページからも入手可能

- エネルギーコースの受講生は事前に申し出ること
  （申し出のない場合は単位不可の可能性有り）
- 再履修の受講生は，できるだけメールにて事前に連絡ください

成績の評価方法

- 試験（中間，期末）約70%（理解度重視，努力点は考慮せず）
  - 試験ではA4用紙1枚分のメモの持ち込み可（予定）
- 毎回のレポート約30%
- 出席は基本的に考慮しません

- 中間試験までにレポート未提出の場合，
中間試験受験不可
- 中間試験以降にレポート未提出の場合，
期末試験受験不可
- 合格の基準
  - 中間，期末ともに30点以上（レポート提出状況がよい場合には，25点以上）
  - 全体での合計が60点以上

授業の進め方

- 毎回，その回の講義内容に関するレポート問題を出します．
- 次回の授業の開始時に，レポート問題の解説をします（約20分）
  - 各自で自分のレポートの採点をしてもらうので，採点用の赤ペンを必ず持参のこと！
  - 採点したレポートは採点後に提出
- 残りの約1時間をつかって講義を実施します．

今後の予定

- 講義室が頻繁に変わるので要注意！
- 授業Webサイトもチェックしてください

- 10/11 第2回目 --- 線形計画その1（103講義室）
- 10/18 --- 休講の予定
- 10/25 第3回目 --- 線形計画その2（総合研究棟110講義室）
- 11/1 第4回目 --- 線形計画その3（総合研究棟110講義室）
- 11/8 第5回目 --- 線形計画その4（総合研究棟110講義室）

数理計画

- 数理計画問題とは？
  - 狭義には：数理（数学）を使って計画を立てるための問題
  - 広義には：与えられた評価尺度に関して
    最も良い解を求める問題（最適化問題）
- 数理計画で扱う，基本的なモデル
  - 線形計画問題（線形最適化問題）
  - ネットワーク計画問題（ネットワーク最適化問題）
  - 非線形計画問題（非線形最適化問題）
  - 組合せ計画問題（組合せ最適化問題）

線形計画問題の例1：生産計画問題

- 工場での生産計画
  - 4種類の原料A，B，C，Dを用いて
  - 3種類の製品I，II，IIIを生産する（生産量は実数値と仮定）
  - 利益を最大にしたい

各製品を1単位生産したときの利益(単位：万円)

I	II	III
70	120	30

各原料の使用可能量

A	B	C	D
80	50	100	70

各製品を1単位生産するのに必要な原料の量

原料＼製品	I	II	III
A	5	0	6
B	0	2	8
C	7	0	15
D	3	11	0

生産計画問題の定式化

- 数学モデルとして定式化（数式を使って表現）
  - 何を変数とするか？

    ➔各製品I, II, III の生産量を x_1, x_2, x_3 とおく
  - 目的：総利益は $70x_1 + 120x_2 + 30x_3$ （万円）← 最大化する
  - 条件：
    - 原料の利用可能量を超えてはならない
      - 原料A：$5x_1 + 6x_3 \leq 80$
      - 原料B：$2x_2 + 8x_3 \leq 50$
      - 原料C：$7x_1 + 15x_3 \leq 100$
      - 原料D：$3x_1 + 11x_2 \leq 70$
    - 生産量は0以上：$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

生産計画問題の定式化:まとめ

- 目的:$70x_1 + 120x_2 + 30x_3 \to$ 最大化
- 条件:

$$\begin{aligned} 5x_1 \qquad\qquad + 6x_3 &\le 80 \\ 2x_2 + 8x_3 &\le 50 \\ 7x_1 \qquad\quad + 15x_3 &\le 100 \\ 3x_1 + 11x_2 \qquad\quad &\le 70 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

目的:
1次関数(線形関数)の最大化
条件:
1次(線形)の不等式(等号付き)

一般に,

目的が一次関数の最大化(最小化)

条件がいずれも一次の不等式(等号付き)または等式

➔線形計画問題

最大化(最小化される関数)は　目的関数

条件は　制約(制約条件)

数理計画問題の定義

- 数理計画問題は，下記のように表される問題
  - 目的関数：　$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ → 最小（または最大）
  - 制約条件：　$x \in S$
    - $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$は変数$x_1, \dots, x_n$に関する関数（目的関数）
    - S はベクトル$(x_1, x_2, \dots, x_n)$の集合（実行可能集合）
    - S の要素は実行可能解
    - 目的関数を最小（または最大）にする実行可能解は最適解

- 目的：$70x_1 + 120x_2 + 30x_3 \rightarrow$ 最大化　➔ $f(x_1, x_2, x_3) = 70x_1 + 120x_2 + 30x_3$
- 条件：

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 \qquad\quad + 6x_3 \le 80 \\ \qquad 2x_2 + 8x_3 \le 50 \\ 7x_1 \qquad\quad + 15x_3 \le 100 \\ 3x_1 + 11x_2 \qquad \le 70 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{array}\right\}$$

➔ S =左の条件を全て満たす(x_1, x_2, x_3) 全体

線形計画問題の例2：輸送問題

- ある会社の輸送計画
  - 2つの工場A_1, A_2 で製品を生産
  - 3つの取引先 B_1, B_2, B_3 に納入
  - 輸送コストを最小にしたい

各工場の生産量

A_1	A_2
90	80

各取引先の注文量

B_1	B_2	B_3
70	40	60

輸送コスト

	B_1	B_2	B_3
A_1	4	7	12
A_2	11	6	3

輸送問題の定式化

- 変数の設定：工場 A_i (i=1,2)から取引先 B_j への輸送量→ x_{ij}
- 目的：総輸送コストを最小に

$$4x_{11} + 7x_{12} + 12x_{13} + 11x_{21} + 6x_{22} + 3x_{23} \rightarrow \text{最小化}$$

- 工場での生産量に関する条件：

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 90, \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 80$$

- 取引先での注文量に関する条件：

$$x_{11} + x_{21} = 70, \quad x_{12} + x_{22} = 40, \quad x_{13} + x_{23} = 60$$

- 輸送量に対する非負条件：

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2, j = 1,2,3)$$

輸送問題の定式化:まとめ

目的関数: $4x_{11} + 7x_{12} + 12x_{13} + 11x_{21} + 6x_{22} + 3x_{23}$ → 最小化

制約条件: $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90, \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} = 80$

$$x_{11} + x_{21} = 70, \quad x_{12} + x_{22} = 40, \quad x_{13} + x_{23} = 60$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2, j = 1,2,3)$$

目的が一次関数の最大化(最小化)

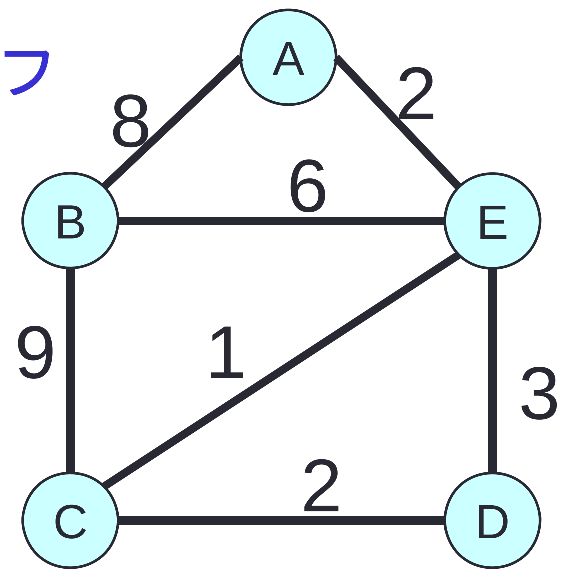
条件がいずれも一次の不等式(等号付き)または等式

➔これは線形計画問題

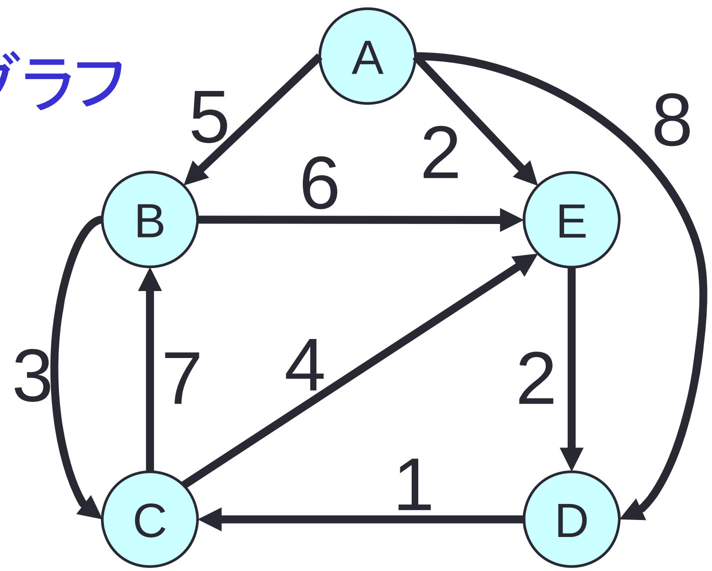
ネットワーク計画問題

- (無向、有向)グラフ
  - 頂点(vertex, 接点、点)が枝(edge, 辺、線)で結ばれたもの
- ネットワーク
  - 頂点や枝に数値データ(距離、コストなど)が付加されたもの
- ネットワーク計画問題
  - ネットワークを使って表現される数理計画問題

無向グラフ

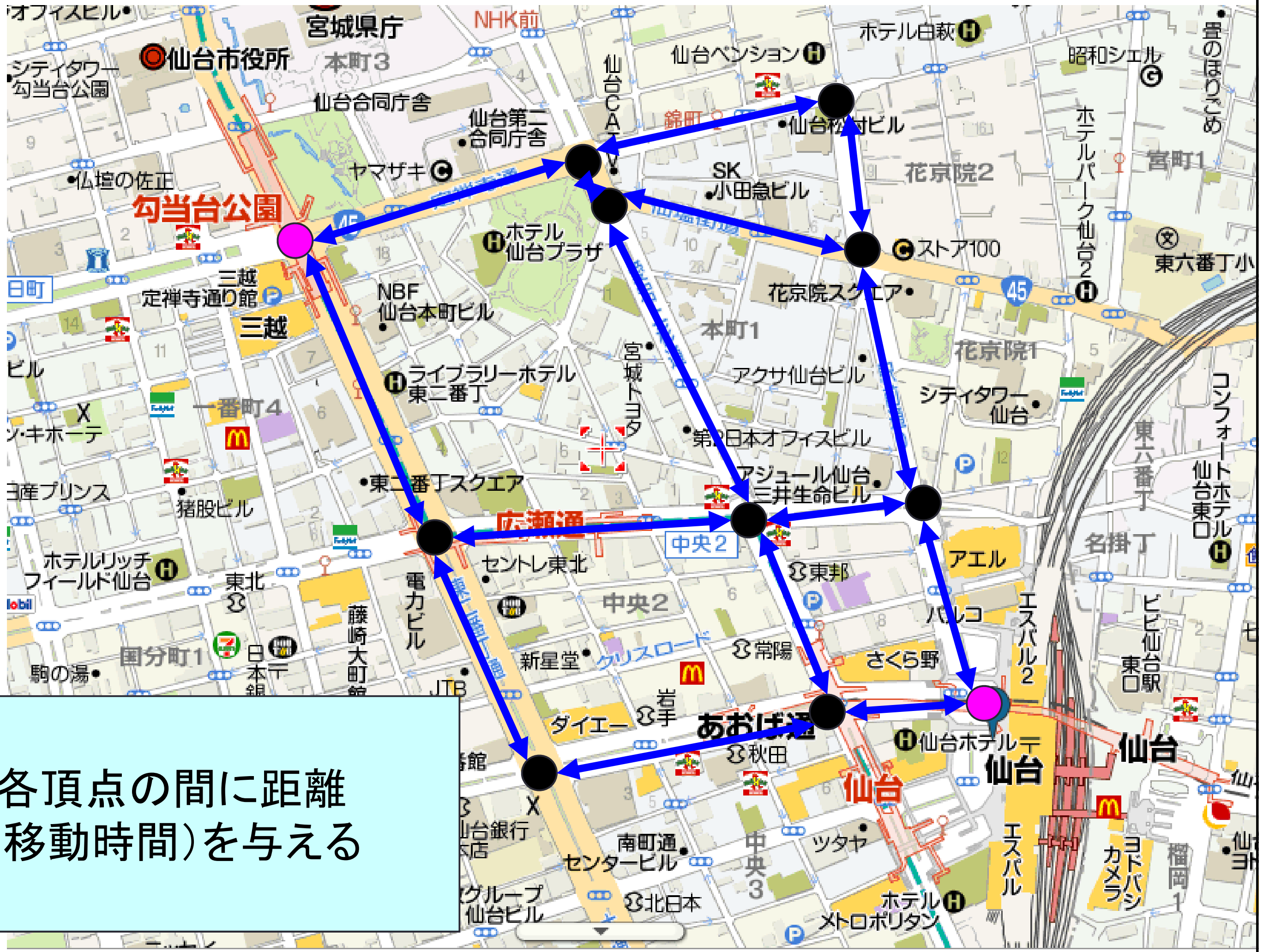


有向グラフ



ネットワーク計画問題の例1：最短路問題

仙台駅から
勾当台公園までの
最短経路を
求めたい
➔グラフを使って
　モデル化



各頂点の間に距離
（移動時間）を与える

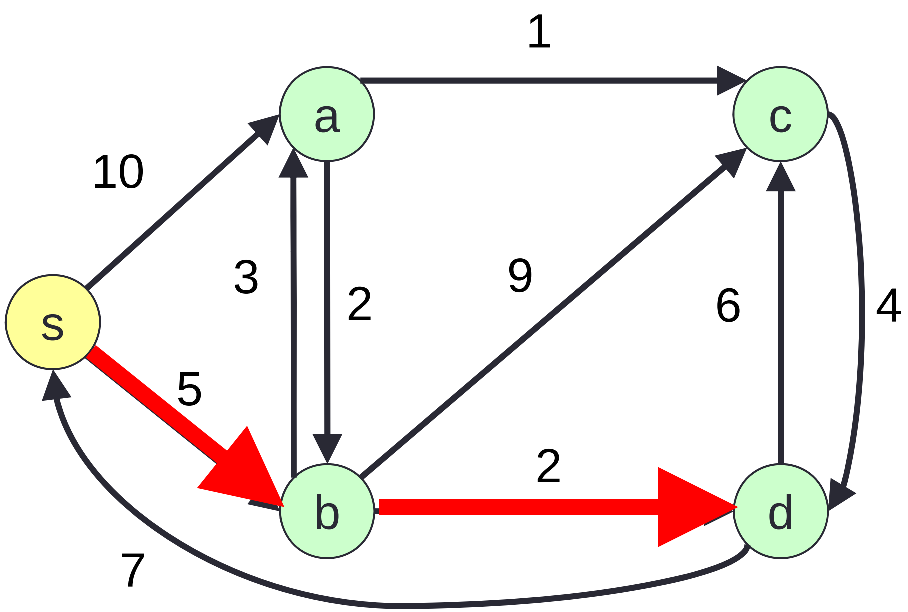
最短路問題の定式化

- 入力：有向グラフ G=(V, E)

  各枝の長さ $\ell(e)$ $(e \in E)$, 始点 $s \in V$, 終点 $d \in V$
- 出力：s から d への最短路

  = sからdへの路（パス）のうち,

  路に含まれる枝の長さの和が最小のもの）

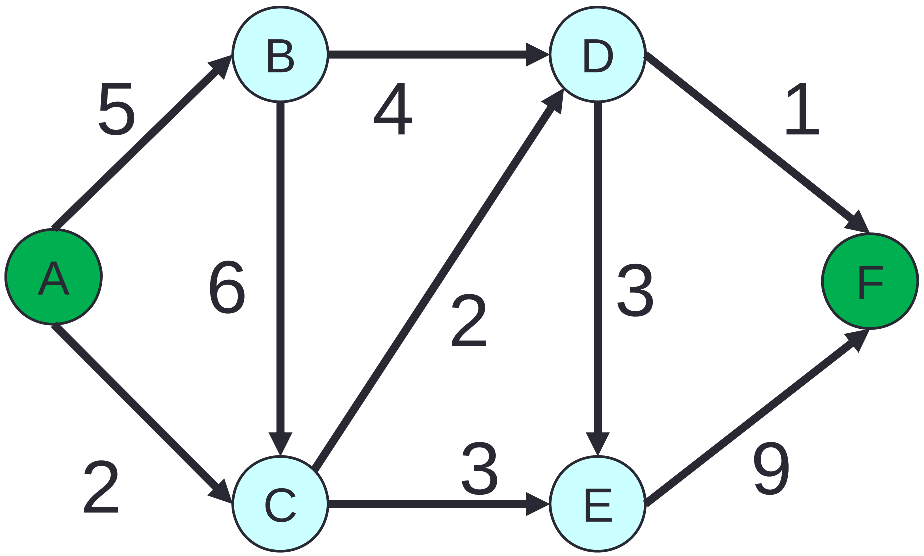


ネットワーク計画問題の例2：最大フロー問題

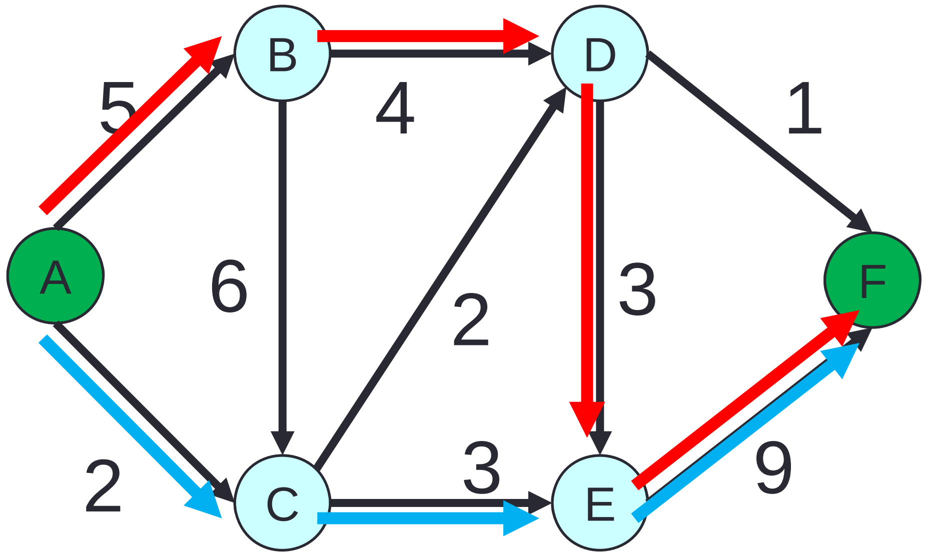
- 運送会社の輸送計画
- A市からF市まで，出来るだけ多くの荷物を送りたい
  - 複数の経路を使うことが可能
- 各都市間には輸送可能量の上限がある（トラックの台数など）
- 途中の都市（B,C,D,E）では荷物の積み替えを行う

AからBへは最大5単位の荷物が輸送可能

BからDへは最大4単位の荷物が輸送可能



最大フロー問題の具体例



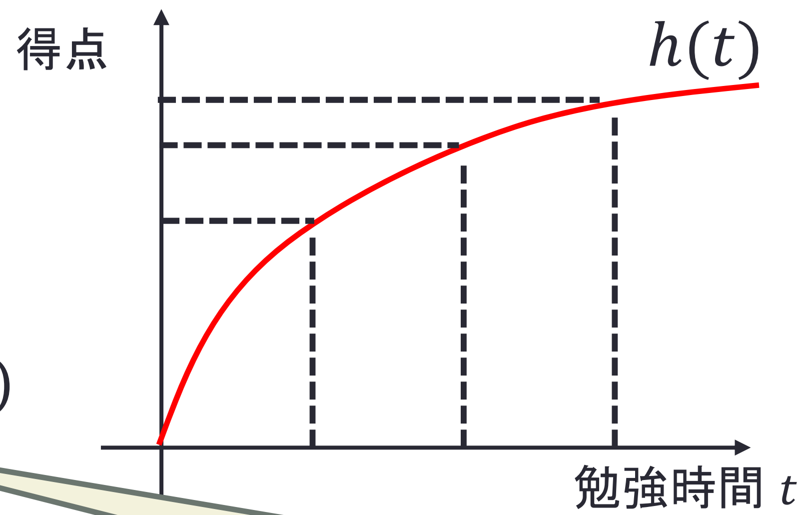
A→B→D→E→F という経路で3単位の荷物を輸送

A→C→E→F という経路で2単位の荷物を輸送

・・・

非線形計画問題の例1：資源配分問題

- Y君の試験勉強の時間配分を決める
- 受験科目は A, B, C の3つ
- 試験勉強時間は最大 20 時間
- ある科目の勉強時間と試験の得点（の期待値）の関係は以下の通り（単調増加，上に凸）
- 3科目の合計得点を最大化したい



目的関数：$h_A(t_A) + h_B(t_B) + h_C(t_C)$

制約条件：$t_A + t_B + t_C \leq 20$

$t_A \geq 0, t_B \geq 0, t_C \geq 0$

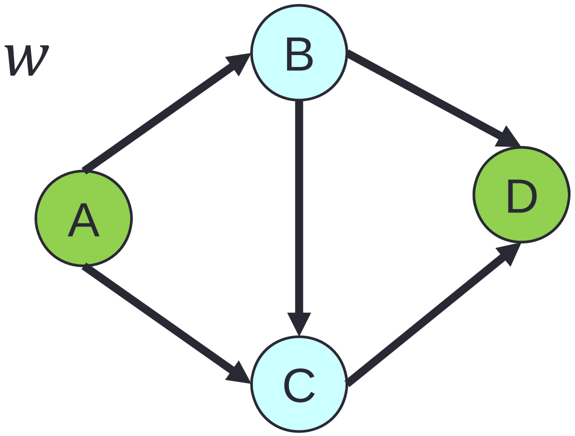
目的関数が非線形関数
➔非線形計画問題

非線形計画問題の例2:交通流割当

- 下記のグラフで表される道路網を考える
- A地点からD地点へ行きたい自動車が w 台
- 渋滞をなるべく避けるため，車の流れをうまく制御したい

- 各枝を通過する車の台数: $x_{AB}, x_{AC}, x_{BC}, x_{BD}, x_{CD} \geq 0$
（車の台数は本来は整数だが，簡単のため実数とする）
- A地点から出ていく車の総数: $x_{AB} + x_{AC} = w$
- B, C地点では，入ってくる車の台数
＝出ていく車の台数:

$$x_{AB} = x_{BD} + x_{BC}, \quad x_{AC} + x_{BC} = x_{CD}$$

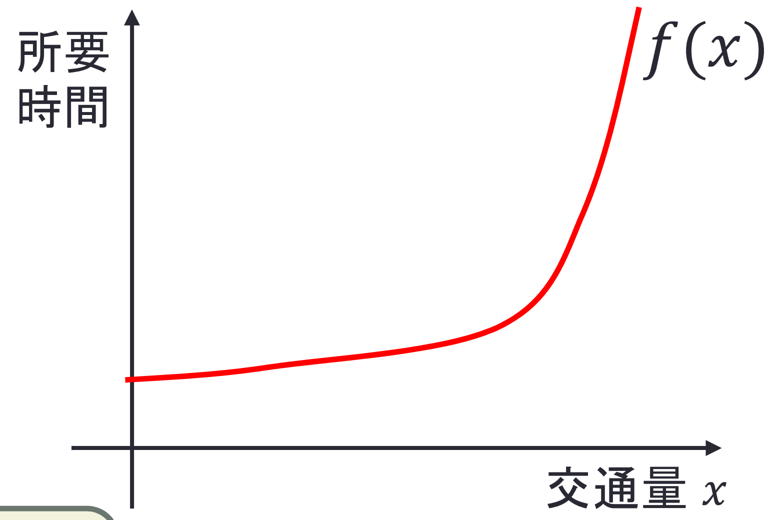


交通流割当の定式化

- 目的:全ての自動車の総所要時間の合計を最小化
- 各区間(各枝)での所要時間は交通量に依存して決まる

➔ 総所要時間は

$$
\begin{aligned}
& x_{AB} f_{AB}(x_{AB}) + x_{AC} f_{AC}(x_{AC}) \\
& \quad + x_{BC} f_{BC}(x_{BC}) + x_{BD} f_{BD}(x_{BD}) \\
& \quad + x_{BD} f_{BD}(x_{BD})
\end{aligned}
$$



目的関数が非線形関数
➔ 非線形計画問題

整数計画問題の例1：生産計画問題

- 工場での生産計画
  - 4種類の原料A，B，C，Dを用いて
  - 3種類の製品I，II，IIIを生産する
  - 利益を最大にしたい

生産量が整数値の
場合を考える
例：自動車，住宅

各製品を1単位生産したときの
利益(単位：万円)

I	II	III
70	120	30

各原料の使用可能量

A	B	C	D
80	50	100	70

各製品を1単位生産するのに
必要な原料の量

原料＼製品	I	II	III
A	5	0	6
B	0	2	8
C	7	0	15
D	3	11	0

生産計画問題の定式化

- 目的：$70x_1 + 120x_2 + 30x_3 \rightarrow$ 最大化
- 条件：

$$\begin{aligned} 5x_1 \quad\quad\quad + 6x_3 &\leq 80 \\ 2x_2 + 8x_3 &\leq 50 \\ 7x_1 \quad\quad\quad + 15x_3 &\leq 100 \\ 3x_1 + 11x_2 \quad\quad\quad &\leq 70 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

x_1, x_2, x_3 は整数

変数（の一部）に
整数条件が付加
➔整数計画問題

見かけは線形計画問題と同じ
でも，最適解の計算は格段に難しくなる

整数計画問題の例2:ナップサック問題

- ハイキングの準備
- n個の品物の中から持って行くものを選択
- ナップサックには b kg まで入れられる
- 品物 $i = 1,2,\dots,n$ の重さは a_i kg, 利用価値は c_i
- 利用価値の合計を最大にしたい

目的関数: $\sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i$ → 最大
制約条件: $\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i \le b$
$x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0,1\}$

変数の全てが
0または1
→0-1整数計画問題

レポート問題（〆切：10月11日授業中）

問1：次の工場での生産計画を線形計画問題として定式化せよ.

- 2種類の原料A, Bを用いて2種類の製品I, II, IIIを生産したい.
  目的は利益を最大にすることである.
  生産量は実数値とする. データは以下の通りである.

各製品を1単位生産したときの利益(単位：万円)

I	II
3	2

各原料の使用可能量

A	B
10	5

各製品を1単位生産するのに必要な原料の量

原料＼製品	I	II
A	5	3
B	1	2

レポート問題

問2：問1で定式化した線形計画問題の実行可能集合を
図示せよ．また，最適解を求めよ．

問3：問1の生産計画において，生産量を整数値に限定する．
この場合の生産計画を，整数計画問題として定式化せよ．

問4：問3で定式化した整数計画問題の実行可能集合を書け．
また，最適解を求めよ．

レポート作成上の注意

- 書籍やWebページなどを参考にしてレポートを作成した場合，その出典を必ず明記すること.
- 他の学生と共同でレポートを作成した場合は，その旨をレポートに書くとともに，レポート作成に関わった学生の名前を全て明記すること.
- これらが守られない場合には，成績を（大幅）減点することもあります.

- 次回授業に出席できない場合は，前日までに私の研究室までもって来てもらえば受理します.

レポート問題（〆切：10月11日授業中）

問1：次の工場での生産計画を線形計画問題として定式化せよ.

- 2種類の原料A, Bを用いて2種類の製品I, II, IIIを生産したい.
  目的は利益を最大にすることである.
  生産量は実数値とする. データは以下の通りである.

各製品を1単位生産したときの利益(単位：万円)

I	II
3	2

各原料の使用可能量

A	B
10	5

各製品を1単位生産するのに必要な原料の量

原料＼製品	I	II
A	5	3
B	1	2

レポート問題

問2：問1で定式化した線形計画問題の実行可能集合を
　図示せよ．また，最適解を求めよ．

問3：問1の生産計画において，生産量を整数値に限定する．
　この場合の生産計画を，整数計画問題として定式化せよ．

問4：問3で定式化した整数計画問題の実行可能集合を書け．
　また，最適解を求めよ．